

1) $a_1 = \frac{1}{3}$ $a_{n+1} = \frac{1}{3-2a_n}$

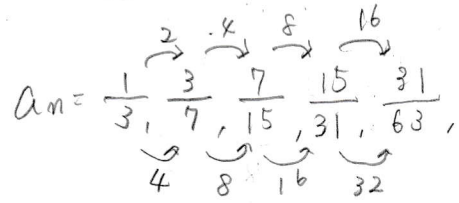
$$a_2 = \frac{1}{3-2a_1} = \frac{1}{3-\frac{2}{3}} = \frac{3}{9-2} = \frac{3}{7}$$

$$a_3 = \frac{1}{3-2a_2} = \frac{1}{3-\frac{6}{7}} = \frac{7}{21-6} = \frac{7}{15}$$

$$a_4 = \frac{1}{3-2a_3} = \frac{1}{3-\frac{14}{15}} = \frac{15}{45-14} = \frac{15}{31}$$

よって $a_2 = \frac{3}{7}, a_3 = \frac{7}{15}, a_4 = \frac{15}{31}$

(2) $a_5 = \frac{1}{3-\frac{30}{31}} = \frac{31}{93-30} = \frac{31}{63}$



分母の数列 $\{b_n\}$ とおくと $n \geq 2$ のとき

$$b_n = 3 + \sum_{k=1}^{n-1} 4 \cdot 2^{k-1} = 3 + \frac{4(2^n - 1)}{2-1} = 2^{n+1} - 1$$

よって $n=1$ のときも成り立つ

分子の数列 $\{c_n\}$ とおくと $n \geq 2$ のとき

$$c_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} 2^k = 1 + \frac{2(2^n - 1)}{2-1} = 2^n - 1$$

よって $n=1$ のときも成り立つ

よって $a_n = \frac{2^n - 1}{2^{n+1} - 1}$ と予想できる

証明

$n=1$ のとき

$$a_1 = \frac{2^1 - 1}{2^{1+1} - 1} = \frac{1}{3}$$

$n=k$ のとき

$$a_k = \frac{2^k - 1}{2^{k+1} - 1}$$

$n=k+1$ のとき

$$a_{k+1} = \frac{1}{3 - 2 \cdot \frac{2^k - 1}{2^{k+1} - 1}} = \frac{2^{k+1} - 1}{3(2^{k+1} - 1) - 2 \cdot 2^k + 2}$$

$$= \frac{2^{k+1} - 1}{2^{k+2} - 1} = \frac{2^{k+1} - 1}{2^{(k+1)+1} - 1}$$

よって $n=k+1$ のときも成り立つ

よってすべての自然数 $n \geq 1$ に対して

$$a_n = \frac{2^n - 1}{2^{n+1} - 1}$$