2013 宮崎大

(1) $a_1=\frac{1}{3}$ $a_{n+1}=\frac{1}{3-2a_n}$

$$a_2=\frac{1}{3-2a_1}=\frac{1}{3-\frac{2}{3}}=\frac{3}{9-2}=\frac{3}{7}$$

$$a_3=\frac{1}{3-2a_2}=\frac{1}{3-\frac{6}{7}}=\frac{7}{21-6}=\frac{7}{15}$$

$$a_4=\frac{1}{3-2a_3}=\frac{1}{3-\frac{14}{15}}=\frac{15}{45-14}=\frac{15}{31}$$

よって

$a_2=\frac{3}{7}$, $a_3=\frac{7}{15}$, $a_4=\frac{15}{31}$

(2)

$$a_5=\frac{1}{3-\frac{30}{31}}=\frac{31}{93-30}=\frac{31}{63}$$

$$a_n=\frac{1}{3},\ \frac{3}{7},\ \frac{7}{15},\ \frac{15}{31},\ \frac{31}{63},\ \cdots$$

(分子の差: 2, 4, 8, 16　分母の差: 4, 8, 16, 32)

分母の数列を$\{b_n\}$とすると $n\geqq2$のとき

$$b_n=3+\sum_{k=1}^{n-1}4\cdot2^{k-1}=3+\frac{4(2^{n-1}-1)}{2-1}=2^{n+1}-1$$

これは$n=1$のときも成り立つ

分子の数列を$\{c_n\}$とすると $n\geqq2$のとき

$$c_n=1+\sum_{k=1}^{n-1}2^k=1+\frac{2(2^{n-1}-1)}{2-1}=2^n-1$$

これは$n=1$のときも成り立つ.

よって $a_n=\frac{2^n-1}{2^{n+1}-1}$ と予想できる

証明

$n=1$のとき

$a_1=\frac{2-1}{4-1}=\frac{1}{3}$で成り立つ.

$n=k$のとき

$a_k=\frac{2^k-1}{2^{k+1}-1}$が成り立つと仮定すると

$n=k+1$のとき

$$a_{k+1}=\frac{1}{3-2\cdot\underbrace{\frac{2^k-1}{2^{k+1}-1}}_{a_k}}=\frac{2^{k+1}-1}{3(2^{k+1}-1)-2^{k+1}+2}=\frac{2^{k+1}-1}{2^{k+2}-1}=\frac{2^{k+1}-1}{2^{(k+1)+1}-1}$$

となり $n=k+1$でも成り立つ

よって すべての自然数nについて

$a_n=\frac{2^n-1}{2^{n+1}-1}$ が成り立つ.