富山2013

(1) $P_1 = 0$ (3の倍数にならない

P_2

$$1 \begin{cases} 1 \\ 2 \end{cases} \circ \qquad P_2 = \frac{1}{2}$$

$$2 \begin{cases} 1 \circ \\ 2 \end{cases}$$

(2) 3の倍数

$$\begin{tikzcd}
P_n \arrow[dr, "\times 0"] & \\
& P_{n+1} \\
1-P_n \arrow[ur, "\times \frac{1}{2}"'] &
\end{tikzcd}$$

$$P_{n+1} = P_n \times 0 + (1-P_n) \times \frac{1}{2}$$

3でわって1余る → 2のカード
3でわって2余る → 1のカード　それぞれ $\frac{1}{2}$ の確率

よって

$$\underline{P_{n+1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}P_n}$$

$P_{n+1} + \alpha = -\frac{1}{2}(P_n + \alpha)$ とおくと

$\alpha = -\frac{1}{3}$ よって

$$P_{n+1} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{2}\left(P_n - \frac{1}{3}\right)$$

数列 $P_n - \frac{1}{3}$ は 初項 $P_1 - \frac{1}{3} = -\frac{1}{3}$ 公比 $-\frac{1}{2}$ の等比数列

$$P_n - \frac{1}{3} = -\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

よって

$$\underline{P_n = \frac{1}{3}\left\{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}}$$