名工大

$a_1=4 \quad a_{n+1}=\dfrac{(3n+4)a_n-9n-6}{(n+1)a_n-3n-1}$

$a_k>3$ を数学的帰納法で証明する

(i) $n=1$ のとき

$a_1=4$ であるから

$4>3$ で成り立つ.

(ii) $n=k$ のとき $a_k>3$ が成り立つと

仮定すると

$a_{k+1}=\dfrac{(3k+4)a_k-9n-6}{(k+1)a_k-3n-1}$

$=\dfrac{3(k+1)a_k+3(-3k-1)+a_k-3}{(k+1)a_k+(-3k-1)}$

$=3+\dfrac{a_k-3}{(k+1)a_k-3k-1}$

$=3+\dfrac{a_k-3}{(k+1)a_k-3(k+1)+2}$

$=3+\dfrac{a_k-3}{(k+1)(a_k-3)+2}$

$a_k-3>0$ より

$\dfrac{a_k-3}{(k+1)(a_k-3)+2}>0$

よって $a_{k+1}>3$ である

ゆえに すべての自然数 n において $a_n>3$ である

(2)

(1)の式より

$a_{n+1}-3=\dfrac{a_n-3}{(n+1)(a_n-3)+2}$ となるので

これの逆数をとると

$\dfrac{1}{a_{n+1}-3}=k+1+\dfrac{2}{a_n-3}$ となる

$b_n=\dfrac{1}{a_n-3}$ より

$b_{n+1}=2b_n+n+1$

(3) (2)より

$b_{n+2}=2b_{n+1}+n+2$

これと (2)の式をひくと

$b_{n+2}=2b_{n+1}+n+2$

$-)\ b_{n+1}=2b_n+n+1$

$b_{n+2}-b_{n+1}=2(b_{n+1}-b_n)+1$

$c_n=b_{n+1}-b_n$ より

$c_{n+1}=2c_n+1$

$c_{n+1}+\alpha=2(c_n+\alpha)$ として α をもとめると

$\alpha=1$

よって

$c_{n+1}+1=2(c_n+1)$

$c_1=b_2-b_1=\dfrac{1}{a_2-3}-\dfrac{1}{a_1-3}$ ……①

$a_2=\dfrac{7a_1-15}{2a_1-4}=\dfrac{13}{4}$ より ①は

$c_1=4-1=3$

よって c_n+1 は初項 4,公比2の等比数列

$c_n+1=4\cdot2^{n-1}$

$c_n=2^{n+1}-1$

(4) $b_{n+1}-b_n=2^{n+1}-1$ より

$b_1=1$ であるから

$b_n=1+\sum_{k=1}^{n-1}(2^{k+1}-1)$

$=1+4\dfrac{(2^{n-1}-1)}{2-1}-(n-1)$

$=1+2^{n+1}-4-n+1$

$=2^{n+1}-n-2$

$b_n=\dfrac{1}{a_n-3}$ より

$a_n-3=\dfrac{1}{2^{n+1}-n-2}$

$a_n=\dfrac{1}{2^{n+1}-n-2}+3 \quad (n=1,2,3\cdots)$