東北大

(1)

$2^n > n^2+7 \quad (n \geqq 6)$ を

数学的帰納法を用いて示す。

(i) $n=6$ のとき

$2^6=64$

$6^2+7=43$ で

$64>43$ となるので成り立つ。

(ii) $n=k \quad (k \geqq 6)$ のとき

$2^k > k^2+7$ が成り立つとすると

$n=k+1$ のとき

$2^{k+1} > 2 \cdot 2^k = 2(k^2+7)$

ここで

$2(k^2+7)$ と $(k+1)^2+7$ の大小を

比較すると

$2(k^2+7)-\{(k+1)^2+7\}$

$=2k^2+14-k^2-2k-1-7$

$=k^2-2k+6$

$=(k-1)^2+5>0$ となり

$2^{k+1} > 2(k^2+7) > (k+1)^2+7$ となるので

$2^{k+1} > (k+1)^2+7$ が成り立つ

よって $n=k+1$ のときも成り立つ

故にすべての $n \ (n \geqq 6)$ について成り立つ。

(2)

(i) $p=2$ のとき

$2^q=q^2+7$ となり

q を $2,3,5$ と変化させると

$q=5$ のとき $32=32$ となり等式が成り立つ。

よって p,q の解の1つは $(2,5)$ である。

$q \geqq 6$ のときは(1)より等式は成り立たない。

(ii) $p \geqq 3$ の素数とすると

$p^q=q^p+7$ において

p^q は奇数であることに着目すると

$q^p=p^q-7$ において右辺は偶数となる。したがって q は 2 にしかならず

このとき

$2^p=p^2-7$ となるが

p を $3,5$ と変化させてもこの等式は

成り立たない。$p \geqq 7$ 以上の素数

においては(1)より。

$2^p > p^n+7 > p^2-7$

であるから成り立たない。

以上より求める (p,q) の組は

$(p,q)=(2,5)$ である