横国大

(1) $a_1=5$

$a_1^2=\frac{2}{3}a_1a_2$

$\frac{2}{3}a_2=a_1$

$a_2=\frac{3}{2}a_1=\frac{15}{2}$

$a_1^2+a_2^2=\frac{2}{3}a_2a_3$

$25+\frac{225}{4}=\frac{2}{3}\cdot\frac{15}{2}a_3$

$\frac{\cancel{2}}{\cancel{3}}\cdot\frac{\overset{5}{\cancel{15}}}{\cancel{2}}a_3=\frac{325}{4}$

$a_3=\frac{65}{4}$　　$a_2=\frac{15}{2}$, $a_3=\frac{65}{4}$ //

(2) $\frac{2}{3}a_na_{n+1}=a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2$ …①

$\frac{2}{3}a_{n+1}a_{n+2}=a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2+a_{n+1}^2$ …②

②−①より

$a_{n+1}^2=\frac{2}{3}a_{n+1}a_{n+2}-\frac{2}{3}a_na_{n+1}$

$a_{n+1}^2=\frac{2}{3}a_{n+1}(a_{n+2}-a_n)$

両辺 a_{n+1} でわって

$a_{n+1}=\frac{2}{3}(a_{n+2}-a_n)$

$\therefore\ a_{n+2}=\frac{3}{2}a_{n+1}+a_n$ //

(3)

(2)より $a_{n+2}-\frac{3}{2}a_{n+1}-a_n=0$ を

変形すると次の2通りの表し方が

できる

$a_{n+2}-2a_{n+1}=-\frac{1}{2}(a_{n+1}-2a_n)$ …③

$a_{n+2}+\frac{1}{2}a_{n+1}=2(a_{n+1}+\frac{1}{2}a_n)$ …④

③より

$a_{n+1}-2a_n$ は初項 $a_2-2a_1=\frac{15}{2}-10=-\frac{5}{2}$

公比 $-\frac{1}{2}$ の等比数列

$\therefore\ a_{n+1}-2a_n=-\frac{5}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ …⑤

④より

$a_{n+1}+\frac{1}{2}a_n$ は初項 $a_2+\frac{1}{2}a_1=\frac{15}{2}+\frac{5}{2}=10$

公比 2の等比数列

$a_{n+1}+\frac{1}{2}a_n=10\cdot2^{n-1}$ …⑥

⑥−⑤より

$$\begin{array}{rl} & a_{n+1}+\frac{1}{2}a_n=10\cdot2^{n-1}\\ -) & a_{n+1}-2a_n=-\frac{5}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\\ \hline & \frac{5}{2}a_n=10\cdot2^{n-1}+\frac{5}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\end{array}$$

$a_n=4\cdot2^{n-1}+\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$a_n=2^{n+1}+\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ $(n=1,2,3\cdots)$ //