

2.1.3 m回 6の目が出る回数 X とし

X が偶数である確率 P_m

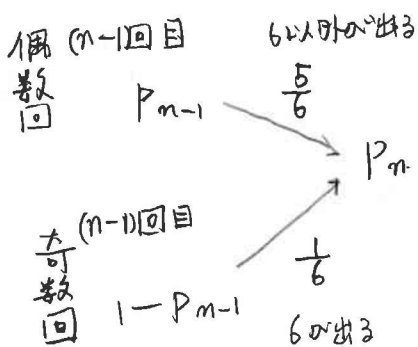
i) P_1 1回偶数が出る... ので $\frac{5}{6}$

P_2 は2回とも6が出る、2回とも6が出ない... ので

$$P_2 = \left(\frac{5}{6}\right)^2 + \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{26}{36} = \frac{13}{18} \quad \therefore P_1 = \frac{5}{6} \quad P_2 = \frac{13}{18}$$

ii) P_{n-1} を $(n-1)$ 回目 6の目が偶数の確率とすると
 $(n-1)$ 回目 6の目が奇数の確率は $1 - P_{n-1}$ と表せる

下図より $n \geq 2$ とすると



2回目から

$$P_n = \frac{5}{6} P_{n-1} + \frac{1}{6} (1 - P_{n-1})$$

$$\therefore P_n = \frac{2}{3} P_{n-1} + \frac{1}{6} \quad (n \geq 2)$$

iii) iii) の漸化式を変形していく

$$P_n + \alpha = \frac{2}{3} (P_{n-1} + \alpha)$$

$$\frac{2}{3} \alpha - \alpha = \frac{1}{6} \quad (1)$$

$$-\frac{1}{3} \alpha = \frac{1}{6}$$

$$\alpha = -\frac{1}{2}$$

$$P_n - \frac{1}{2} = \frac{2}{3} \left(P_{n-1} - \frac{1}{2} \right) \quad \text{より}$$

$$P_n - \frac{1}{2} \text{ は } P_1 - \frac{1}{2} = \frac{5}{6} - \frac{1}{2} = \frac{1}{3} \text{ を初項とし、}$$

公比 $\frac{2}{3}$ の等比数列

$$P_n - \frac{1}{2} = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

$$\therefore P_n = \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} + \frac{1}{2}$$

これは $n=1$ のときも成り立つ。

$$P_n = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3}\right)^n + \frac{1}{2} \text{ とした方が}$$