かくりつゼンカ

(1) Aが赤をもっているとき

ウラが出れば Aはそのままなので

$a_1 = \frac{1}{2}$

Bが赤をもつことは AとBの入れかえがおこるときなので オモテが出るときなので

$b_1 = \frac{1}{2}$

Cが赤をもつことは1回の操作ではおこらないので

$c_1 = 0$

2回の操作でAが赤をもっていることは

ウラ－ウラとなるか、オモテ－オモテとなるかの2通り。ともに $\frac{1}{4}$ の確率なので

$a_2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

$a_2 = \frac{1}{2}$

2回の操作でBが赤をもつことは

ウラ－オモテとなるときのみなので

$b_2 = \frac{1}{4}$

2回の操作でCが赤をもつことは

オモテ－ウラとなるときのみなので

$c_2 = \frac{1}{4}$

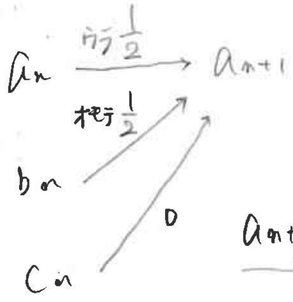
以上より

$a_1 = \frac{1}{2}$, $b_1 = \frac{1}{2}$, $c_1 = 0$

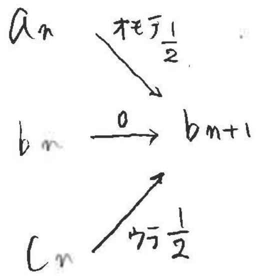
$a_2 = \frac{1}{2}$ $b_2 = \frac{1}{4}$ $c_2 = \frac{1}{4}$

(2) n回目にA, B, Cが赤を持っていたとして

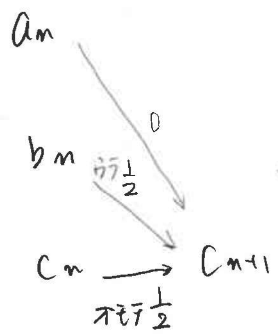
n+1回目にA, B, Cが赤を持つ場合を考える



$a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}b_n$



$b_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}c_n$



$c_{n+1} = \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{2}c_n$

(3) $a_n + b_n + c_n = 1$ であることから

$a_n + c_n = 1 - b_n$

これと(2)より

$b_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + c_n)$ から

$b_{n+1} = \frac{1}{2}(1 - b_n)$

$b_{n+1} = -\frac{1}{2}b_n + \frac{1}{2}$

$b_{n+1} + \alpha = -\frac{1}{2}(b_n + \alpha)$ とすると $\alpha = -\frac{1}{3}$

$b_{n+1} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{2}\left(b_n - \frac{1}{3}\right)$ と変形でき

$b_n - \frac{1}{3}$ は初項 $b_1 - \frac{1}{3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$, 公比 $-\frac{1}{2}$ の

等比数列 $b_n - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

したがって $b_n = \frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \frac{1}{3}$