

C_1 を, 中心が $(1, 1)$, 半径 1 の円とする。円 C_2, C_3, C_4, \dots を次のように定める。
円 C_n は, x 軸, y 軸および円 C_n の半径 r_n は, 円 C_{n-1} の半径 r_{n-1} よりも小さいものとする。

このとき, 次の問いに答えよ。

- (1) O を原点とし, $n = 2, 3, 4, \dots$ に対して P_n を C_n と C_{n-1} の接点とするとき, OP_n の長さを r_n で表せ。
- (2) r_n と r_{n-1} の関係を求め, 数列 $\{r_n\}$ が等比数列であることを示せ。
- (3) 円 C_6 は, 原点を中心とした半径 $\frac{1}{1000}$ の円の内部に含まれることを示せ。

[香川大]