座標平面上に 3 点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$, $\mathrm{P}_1(\sqrt{3},\ 1)$, $\mathrm{P}_2(\sqrt{3},\ 0)$ をとる。点 P_2 から線分 OP_1 に引いた垂線と線分 OP_1 との交点を P_3 とする。次に, 点 P_3 から線分 OP_2 に引いた垂線と線分 OP_2 との交点を P_4 とする。この操作を繰り返すことにより, 点 P_n を定める。すなわち, 点 P_{n-1} から OP_{n-2} に引いた垂線と線分 l OP_{n-2} との交点を P_n とする。このとき, 以下の問いに答えよ。

(1) 三つの線分 $\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2$, $\mathrm{P}_2\mathrm{P}_3$, $\mathrm{P}_3\mathrm{P}_4$ の長さをそれぞれ求めよ。

(2) 線分 $\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}$ の長さを n を用いて表せ。

(3) 三つの三角形 $\mathrm{OP}_1\mathrm{P}_2$, $\mathrm{OP}_2\mathrm{P}_3$, $\mathrm{OP}_3\mathrm{P}_4$ の面積をそれぞれ求めよ。

(4) 三角形 $\mathrm{OP}_n\mathrm{P}_{n+1}$ の面積を n を用いて表せ。

(5) 三角形 $\mathrm{OP}_n\mathrm{P}_{n+1}$ の面積を a_n とおき,

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

と定義する。S_n は $2\sqrt{3}$ 以上にならないことを証明せよ。

〔岩手大〕