

a を実数とする。x に関する方程式 $\log_3(x-1) = \log_9(4x-a-3)$ が異なる 2 つの実数解をもつとき、a のとりうる値の範囲を求めよ。 [新潟大]

左辺

$$\frac{\log_9(x-1)}{\log_9 3} = \frac{\log_9(x-1)}{\log_9(9)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\log_9(x-1)}{\frac{1}{2}} = 2 \log_9(x-1)$$

右辺

$$2 \log_9(x-1) = \log_9(4x-a-3) \quad \because \text{真数条件 } x > 1, x > \frac{a+3}{4} \dots (a)$$

$$\log_9(x-1)^2 = \log_9(4x-a-3)$$

$$(x-1)^2 = 4x-a-3$$

x > 1 の左辺・右辺が正になること分かる。

$$x^2 - 2x + 1 - 4x + a + 3 = 0$$

$$x^2 - 6x + a + 4 = 0 \dots (1)$$

ここで

$$(1) \text{ は } (x-3)^2 + a - 5 = 0 \text{ と変形できる。よって } f(x) = (x-3)^2 + a - 5 \text{ とおくと}$$

$$a - 5 < 0 \dots a < 5 \dots (b)$$

(a) の $x > 1$ で解をもつことから

$$f(1) > 0$$

$$4 + a - 5 > 0$$

$$a > 1 \dots (c)$$

$$\therefore (b), (c) \text{ より}$$

$$\underline{1 < a < 5}$$

判別式でもおぼつかない...

