対数13

$\frac{1}{4} \leqq x \leqq 1$ で定義された関数 $y = (\log_{\frac{1}{2}} x)^2 - \frac{1}{2}\log_{\frac{1}{2}} x^2 + 1$ を考える。

(1) $\log_{\frac{1}{2}} x = t$ とおくとき, t の値の範囲を求めよ。

(2) y を t を用いて書き表わせ。

(3) y の最大値および最小値を求めよ。また, そのときの x の値を求めよ。

〔山梨大〕

(1) ~~真数条件より~~ $x > 0$

$\frac{1}{4} \leqq x \leqq 1 \rightarrow \log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{4} \geqq \log_{\frac{1}{2}} x \geqq \log_{\frac{1}{2}} 1$

$\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^2 \geqq \log_{\frac{1}{2}} x \geqq \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^0$

$2 \geqq \underbrace{\log_{\frac{1}{2}} x}_{t} \geqq 0 \quad \therefore \quad \underline{0 \leqq t \leqq 2}$

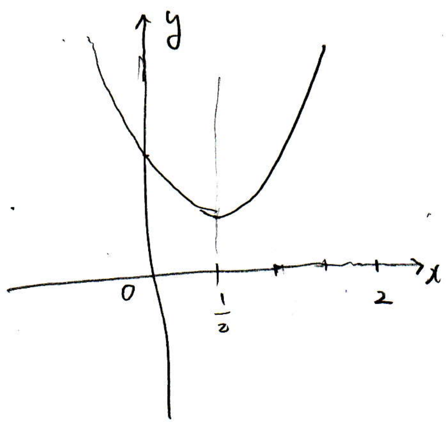
(2)

$y = t^2 - t + 1$

$y = (\log x)^2 - \log x + 1$ より (底は$\frac{1}{2}$とする)

(3)

$y = \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$ と変形でき tは $0 \leqq t \leqq 2$ の範囲であるから



$t = \frac{1}{2}$ のとき 最小 $\frac{3}{4}$ $\left(x = \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$t = 2$ のとき 最大 3 $\left(x = \frac{1}{4}\right)$

ちなみに

$t = \log_{\frac{1}{2}} x = \frac{1}{2} = \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$

$\therefore x = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$t = \log_{\frac{1}{2}} x = 2 = \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$