

正の数 x, y が等式

$$\log_{\sqrt{a}} x = 1 + \log_a y$$

を満たす。ただし、 a は 1 でない正の定数とする。このとき、次の各問に答えよ。

(1) y を x の式で表せ。

(2) $x - y$ の最大値を求め、そのときの x, y の値も求めよ。

[早稲田大]

$$(1) \frac{\log_a x}{\log_a \sqrt{a}} = \log_a a + \log_a y$$

$$\frac{\log_a x}{\frac{1}{2}} = \log_a a y \rightarrow 2 \log_a x = \log_a a y$$

$$\log_a x^2 = \log_a a y$$

$$\therefore ay = x^2$$

$$y = \frac{x^2}{a} \dots (\text{答})$$

$$(2) x - y = x - \frac{x^2}{a} \text{ とおす}$$

$$-\frac{x^2}{a} + x = -\frac{1}{a} \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \frac{a}{4}$$

と変形してあげる

$$x = \frac{a}{2} \text{ のとき } \frac{a}{4} \text{ とおす}$$

$$\therefore \text{このとき } y = \frac{a}{4} \text{ とおす}$$

$$\therefore x = \frac{a}{2}, y = \frac{a}{4} \text{ のとき } x - y \text{ の最大値 } \frac{a}{4} \text{ である}$$
