

次の問いに答えよ。

- (1) $\log_{10} 3$ は無理数であることを証明せよ。
- (2) $\frac{6}{13} < \log_{10} 3 < \frac{1}{2}$ が成り立つことを示せ。
- (3) 3^{26} の桁数を求めよ。

[新潟大]

1) $\log_{10} 3 = \frac{n}{m}$ とおく (m, n は互いに素)

このとき

$$\log_{10} 3 = \log_{10} 10^{\frac{n}{m}}$$

よって $3 = 10^{\frac{n}{m}}$ と両辺 m 乗すると

$$3^m = (10^{\frac{n}{m}})^m$$

$3^m = 10^m$ とおき 左辺は 3 の倍数数であるが、右辺は 3 の倍数数ではない

よって $\log_{10} 3 = \frac{n}{m}$ としたことが成り立たない

よって $\log_{10} 3$ は無理数である。

2) $\log_{10} 10^{\frac{6}{13}} < \log_{10} 3 \rightarrow 10^{\frac{6}{13}} < 3 \rightarrow 10^6 < 3^{13}$

$$3^{13} = 3(3^4)^3 = 3 \cdot 81^3 > 3 \cdot 80^3 = 1536000 > 1000000 \dots \textcircled{1}$$

$$\log_{10} 3 < \log_{10} 10^{\frac{1}{2}} \rightarrow 3 < 10^{\frac{1}{2}} \rightarrow 3 < \sqrt{10} \dots \textcircled{2}$$

①, ②より $\frac{6}{13} < \log_{10} 3 < \frac{1}{2}$ が成り立つ

3) $N = 3^{26}$ とおくと $\log_{10} N = 26 \log_{10} 3$

2)より $\frac{6}{13} < \log_{10} 3 < \frac{1}{2}$ より $\frac{6}{13} \cdot 26 < 26 \log_{10} 3 < \frac{1}{2} \cdot 26$

$$12 < 26 \log_{10} 3 < 13$$

よって 13 桁