4.

$(\log_{10} x)^2 - \log_{10} x^2 + 3p = 0$ の 2 つの解を α, β とするとき

(1) p のとる範囲を求めよ。

(2) $q = \log_\alpha \beta + \log_\beta \alpha$ を p の関数として表わせ。

(3) q のとりうる範囲を求めよ。

〔明治大〕

(1) $\log_{10} x = X$ とおくと

$X^2 - 2X + 3p = 0$ 異なる2つの解をもつためには

$D > 0$ (∵ Dは判別式)

$4 - 12p > 0$

$-12p > -4$

$p < \frac{1}{3}$ //

(2) $q = \dfrac{\log_{10}\beta}{\log_{10}\alpha} + \dfrac{\log_{10}\alpha}{\log_{10}\beta}$

$= \dfrac{(\log_{10}\beta)^2 + (\log_{10}\alpha)^2}{\log\alpha \log_{10}\beta}$

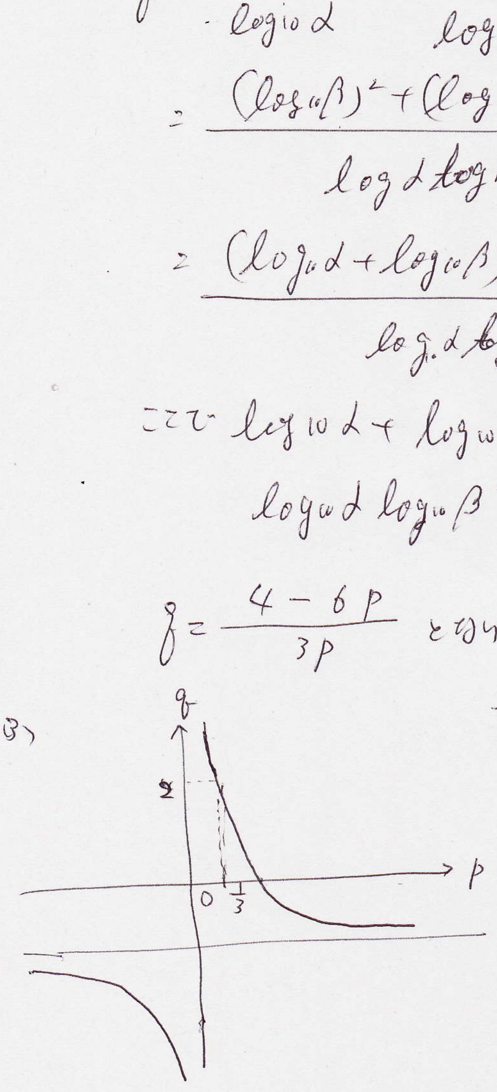
$= \dfrac{(\log_{10}\alpha + \log_{10}\beta)^2 - 2\log_{10}\alpha \log_{10}\beta}{\log_{10}\alpha \log_{10}\beta}$ …①

ここで $\log_{10}\alpha + \log_{10}\beta = 2$

$\log_{10}\alpha \log_{10}\beta = 3p$ であるから ①は

$q = \dfrac{4 - 6p}{3p}$ となり $q = \dfrac{4}{3p} - 2$ である //

(3)



$q < -2$ (1)より $p < \frac{1}{3}$ であるから

$q > 2$

∴ $q < -2$ $q > 2$ //