xy 平面上で条件 $\log_3 x \leqq 1 + \log_3 y \leqq \log_3 x + \log_3(6-3x)$ を満たす領域を D とする。次の問いに答えよ。

(1) xy 平面上に D を図示せよ。

(2) 点 (x, y) が D 内を動くときの, $y - \dfrac{1}{2}x$ の最大値, 最小値を求めよ。

〔東北学院大〕

(1) 与式は

$\log_3 x \leqq \log_3 3 + \log_3 y \leqq \log_3 x(6-3x)$

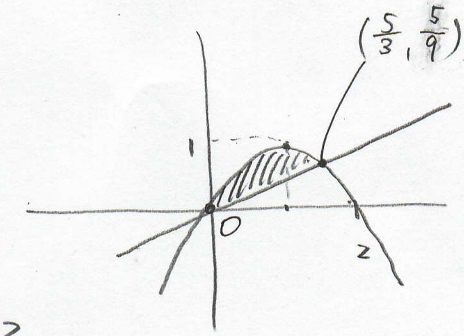
$\log_3 x \leqq \log_3 3y \leqq \log_3 x(6-3x)$ より

$x \leqq 3y \leqq x(6-3x)$ 両辺3でわって

$\frac{x}{3} \leqq y \leqq x(2-x)$

となり $y=\frac{x}{3}$ と $y=x(2-x)$ で考える

$y=x(2-x)=-(x-1)^2+1$



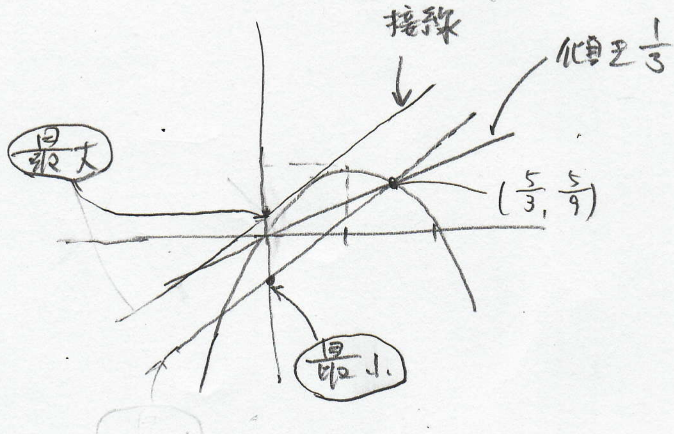
$\frac{x}{3}=2x-x^2$ より

$x(3x-5)=0$ となり $x=0, \frac{5}{3}$ で交点をもつ

$x=\frac{5}{3}$ のとき $y=\frac{5}{9}$ となる。よって右図のようになる。斜線部 境界線含む

(2) $y-\frac{1}{2}x=k$

$y=\frac{1}{2}x+k$ として切片を考える



右図のように接するとき最大値

点$(\frac{5}{3}, \frac{5}{9})$を通るとき最小値となる

$-x^2+2x=\frac{1}{2}x+k$ として

$-(x-\frac{3}{4})^2+\frac{9}{16}=k$

∴ $x=\frac{3}{4}$ のとき最大値 $\frac{9}{16}$

$y=\frac{1}{2}x+k$ に $(\frac{5}{3}, \frac{5}{9})$ を代入して

$\frac{5}{9}=\frac{5}{6}+k$ $k=-\frac{5}{18}$

よって 最大値 $\frac{9}{16}$ 最小値 $-\frac{5}{18}$