直線 $ax+y-a=0$ と円 $x^2+y^2-y=0$ が異なる2点P, Qで交わる。このとき, 次の問いに答えなさい。

(1) 円の中心と半径を求めなさい。

(2) a の値の範囲を求めなさい。

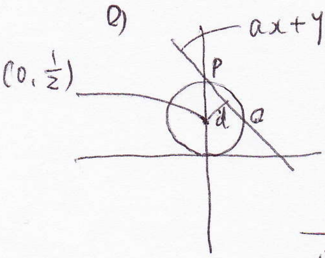
(3) 線分PQの中点の座標を求めなさい。

(4) 線分PQの長さが $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ となるような a の値を求めなさい。

〔高知大〕

(1) $x^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$　　中心 $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ 半径 $\frac{1}{2}$

(2)



$d=\dfrac{|a\cdot 0+\frac{1}{2}-a|}{\sqrt{a^2+1}}=\dfrac{|\frac{1}{2}-a|}{\sqrt{a^2+1}}$ これが $\frac{1}{2}$ より小さければよい

$\dfrac{|\frac{1}{2}-a|}{\sqrt{a^2+1}}<\dfrac{1}{2}$　　$|\frac{1}{2}-a|<\frac{1}{2}\sqrt{a^2+1}$　両辺2乗して　$\frac{1}{4}-a+a^2<\frac{1}{4}(a^2+1)$

$1-4a+4a^2<a^2+1$　　$3a^2-4a<0$　　$a(3a-4)<0$　　$0<a<\frac{4}{3}$

(3)

$y=-ax+a$ これを円の式に代入

$x^2+(-ax+a)^2-(-ax+a)=0$

$x^2+a^2x^2-2a^2x+a^2+ax-a=0$

$(1+a^2)x^2+(a-2a^2)x+a^2-a=0$

ここで P, Q の x座標をそれぞれ α, β とすると

解と係数の関係より

$\alpha+\beta=\dfrac{2a^2-a}{1+a^2}$ であるから,

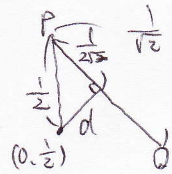
PQの中点の座標は $\dfrac{a(2a-1)}{2(a^2+1)}$ これを $y=-ax+a$ に

代入して y座標を求めると $\dfrac{a(a+2)}{2(a^2+1)}$

よって中点の座標は

$$\left(\frac{a(2a-1)}{2(a^2+1)}, \frac{a(a+2)}{2(a^2+1)}\right)$$

(4)



$d=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2}=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$

$d=\dfrac{|\frac{1}{2}-a|}{\sqrt{a^2+1}}$ より　$\dfrac{|\frac{1}{2}-a|}{\sqrt{a^2+1}}=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$

$|\frac{1}{2}-a|=\frac{1}{2\sqrt{2}}\sqrt{a^2+1}$

$\left(\frac{1}{2}-a\right)^2=\frac{1}{8}(a^2+1)$

$\frac{1}{4}-a+a^2=\frac{1}{8}a^2+\frac{1}{8}$

$2-8a+8a^2=a^2+1$

$7a^2-8a+1=0$

$1 \quad -1 \quad -7$

$7 \quad -1 \quad -1$

$(a-1)(7a-1)=0$

$a=1, \frac{1}{7}$