ごうかく!

xy 平面上の 2 点 $\mathrm{A}\left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\mathrm{B}\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ を直径の両端とする円 C を考える。

(1) C の方程式を求めよ。

(2) 直線 $y = mx$ と C とが 1 点で接するとき, m の値を求めよ。

(3) x の 2 次の整式 $f(x)$ を考え, xy 平面上において $y = f(x)$ で表わされる曲線を D とする。D が座標 $(3, 0)$ の点と原点 O の 2 点を通り, かつ原点 O における D の接線の傾きが上の (2) で求めた m の値と一致するとき, $f(x)$ を求めよ。

〔山梨大〕

(1) 中心の座標は

$$\left(\frac{\frac{3}{2}-\frac{1}{2}}{2}, \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}\right) \to \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

直径は $\sqrt{\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 2$

$\therefore$ C は $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 1$ //

(2) $y=mx$ と C の中心からの距離が円の半径の 1 と等しければよい

$-mx+y=0$ として 中心 $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ からの距離は

$$\frac{\left|-\frac{1}{2}m+\frac{\sqrt{3}}{2}\right|}{\sqrt{m^2+1}} = 1$$

$$\frac{1}{4}(-m+\sqrt{3})^2 = m^2+1$$

$$m^2-2\sqrt{3}m+3 = 4m^2+4$$

$$3m^2+2\sqrt{3}m+1=0 \to (\sqrt{3}m+1)^2=0 \quad \therefore m=-\frac{1}{\sqrt{3}}$$ //

(3) $f(x) = ax(x-3)$ とおける

$$f'(x) = a(x-3)+ax$$

$$= 2ax-3a$$

$f'(0) = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ より

$$-3a = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\therefore a = \frac{1}{3\sqrt{3}}$$

$$\therefore f(x) = \frac{1}{3\sqrt{3}}x(x-3)$$

$$f(x) = \frac{\sqrt{3}}{9}x(x-3)$$ //