図と式14

中心が $\left(a, \frac{a}{2}\right)$ で, 半径が a の円 C とする。円 C が直線 $y=-x+\frac{1}{2}$ と異なる2点で交わるような a の値の範囲を求めよ。また, この2交点の距離の最大値を求めよ。〔関西大〕

1 Cの円の式は

$$(x-a)^2+\left(y-\frac{a}{2}\right)=a^2$$

直線lの式は $x+y-\frac{1}{2}=0 \rightarrow 2x+2y-1=0$ として

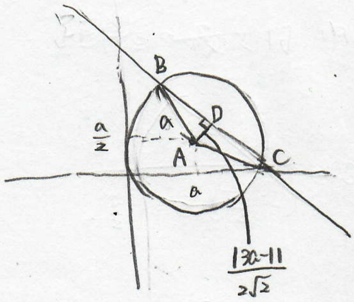
中心からの距離が半径aより短ければ異なる2点で交わるので

中心からの直線lまでの距離は

$$d=\frac{|2a+a-1|}{\sqrt{4+4}}=\frac{|3a-1|}{2\sqrt{2}}$$ であり $\frac{|3a-1|}{2\sqrt{2}}<a$ として

$$(3a-1)^2<8a^2$$
$$9a^2-6a+1<8a^2$$
$$a^2-6a+1<0$$

∴ $3-2\sqrt{2}<a<3+2\sqrt{2}$



交点をBCとする. BCの中点をD, 円の中心をAとすると

AB=AC=a　AD=$\frac{|3a-1|}{2\sqrt{2}}$ であり BC=2BD

三平方の定理より $BD=\sqrt{a^2-\frac{(3a-1)^2}{8}}$

∴ 求める距離をlとすると 2BDであるから

$$l=2\sqrt{\frac{-a^2+6a-1}{8}}=2\sqrt{\frac{-(a-3)^2+8}{8}}$$ となり

a=3のとき最大値2となる

14