

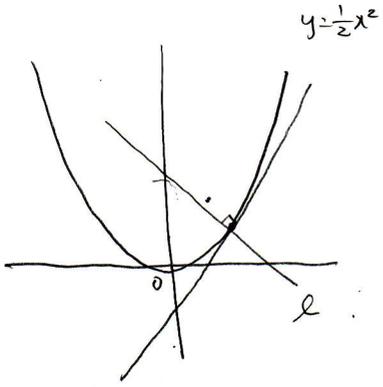


2式15

関数  $y = \frac{1}{2}x^2$  のグラフ  $C$  と、その上の点  $P(a, \frac{1}{2}a^2)$  について以下の問いに答えよ。ただし、 $a > 0$  とする。

- (1) 点  $P$  における曲線  $C$  の接線と直線  $l$  が点  $P$  で垂直に交わる時、直線  $l$  の方程式を  $a$  を用いて表せ。
- (2) (1) の直線  $l$  が中心  $(0, \frac{1}{2})$ 、半径  $\frac{1}{3}$  の円に接するときの  $a$  の値を求めよ。

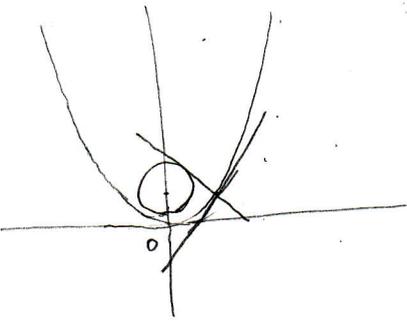
(1)



$y' = x$  であり、点  $P$  における接線の式は  
 $y = a(x-a) + \frac{1}{2}a^2$  であり  $l$  に垂直だから  
 点  $P$  を通る式は  
 $y = -\frac{1}{a}(x-a) + \frac{1}{2}a^2$

$$y = -\frac{1}{a}x + \frac{1}{2}a^2 + 1$$

(2)



$l$  の方程式を  
 $x^2 + (y - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{9}$  とし  
 直線  $l$  を  $\frac{1}{a}x + y - \frac{1}{2}a^2 - 1 = 0$  とし  
 $2x + 2ay - a^3 - 2a = 0$  とおくと  
 点  $(0, \frac{1}{2})$  から  $l$  までの距離が  $\frac{1}{3}$  であるから

$$\frac{|a - a^3 - 2a|}{\sqrt{4 + 4a^2}} = \frac{1}{3} \text{ となり}$$

$$|-a^3 - a| = \frac{2}{3} \sqrt{1 + a^2} \text{ 両辺を2乗すると}$$

$$(-a^3 - a)^2 = \frac{4}{9}(1 + a^2)$$

$$a^6 + 2a^4 + a^2 = \frac{4}{9} + \frac{4}{9}a^2$$

$$9a^6 + 18a^4 + 5a^2 - 4 = 0 \quad a = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ のとき成り立つ}$$

$$(3a^2 - 1)(3a^4 + 7a^2 + 4) = 0$$

常正

$$\therefore 3a^2 - 1 = 0$$

$$\therefore a = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

