3 次関数 $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 6$ を考える。

(1) $f(x)$ の極大値と極小値を求めなさい。

(2) $y = f(x)$ のグラフを C とし, C 上の点 $(a,\ f(a))$ における接線を ℓ とするとき, C と ℓ の共有点の x 座標を求めなさい。また C と ℓ が接点以外に共有点を持たないときの a の値を求めなさい。

(3) $a = 0$ のとき, C と ℓ で囲まれた部分の面積を求めなさい。

〔S62' センター本試験改〕

(1)

$f'(x) = 6x^2 - 6x - 36$
$= 6(x-3)(x+2)$

x	…	-2	…	3	…
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

$f(x)$ は $x=-2$ のとき極大値をとる

$f(-2) = -16 - 12 + 72 + 6 = 50$

$f(x)$ は $x=3$ のとき極小値をとる

$f(3) = 54 - 27 - 108 + 6 = -75$

$x=-2$ のとき極大値 50
$x=3$ のとき極小値 -75

(2) $(a, f(a))$ における接線は

$y - f(a) = f'(a)(x-a)$ より

$y - 2a^3 + 3a^2 + 36 - 6 = (6a^2 - 6a - 36)(x-a)$ これで $y=f(x)$ とおくと

$2x^3 - 3x^2 + (6a - 6a^2)x + 4a^3 - 3a^2 = 0$ $x=a$ を解にもつことから因数分解すると

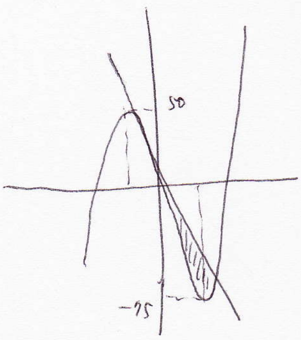
$(x-a)^2(2x+4a-3) = 0$ よって $a,\ \dfrac{-4a+3}{2}$

この2つの解が等しいとき接点しか共有点がないので $a = \dfrac{-4a+3}{2}$ とおいて解くと

$a = \dfrac{1}{2}$

(3) $a=0$ のとき ℓ : $y = -36x + 6$ 積分区間は 0, $\dfrac{3}{2}$

求める面積を S とすると



$S = \int_0^{\frac{3}{2}} \{(-\cancel{36x}+\cancel{6}) - 2x^3 + 3x^2 + \cancel{36x} - \cancel{6}\} dx$

$= \int_0^{\frac{3}{2}} (-2x^3 + 3x^2) dx = \left[-\frac{1}{2}x^4 + x^3\right]_0^{\frac{3}{2}} = -\frac{81}{32} + \frac{27}{8} = \frac{27}{32}$