図と式22

次の連立不等式の表す領域を $D$ とする。

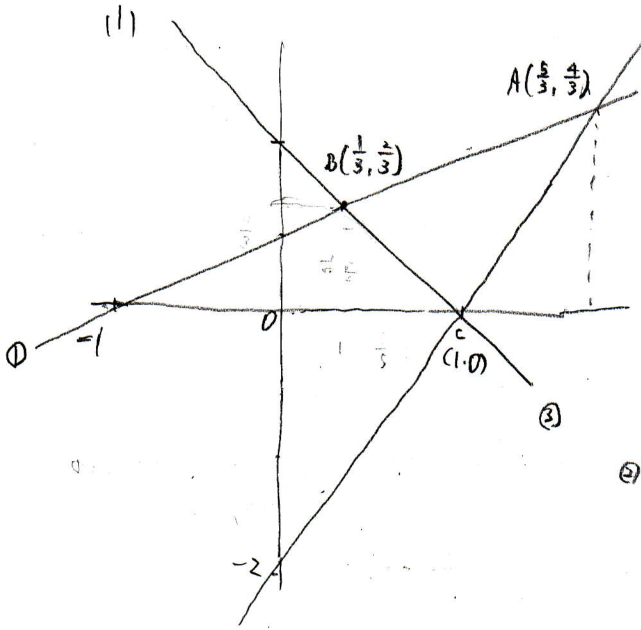
$$x-2y+1 \geqq 0,\ 2x-y-2 \leqq 0,\ x+y-1 \geqq 0$$

(1) 点 $\mathrm{P}(x, y)$ がこの領域 $D$ 内を動くとき，$x^2+y^2$ の最大値，最小値を求めよ。また，それぞれの場合の $x, y$ の値を求めよ。

(2) 点 $\mathrm{P}(x, y)$ がこの領域 $D$ 内を動くとき，$y-x^2$ の最大値，最小値を求めよ。また，それぞれの場合の $x, y$ の値を求めよ。

〔立命館大〕

(1)




$-2y=-x-1 \quad y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2} \cdots ①$

$-y=-2x+2 \quad y=2x-2 \cdots ②$

$y=-x+1 \cdots ③$

①, ②の交点は $\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}=2x-2$

$x+1=4x-4$

$-3x=-5$

$x=\frac{5}{3} \quad A\left(\frac{5}{3}, \frac{4}{3}\right)$

②, ③の交点は

$2x-2=-x+1$

$3x=3$

$x=1 \quad C(1, 0)$

①, ③の交点は

$\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}=-x+1$

$x+1=-2x+2$

$3x=1$

$x=\frac{1}{3} \quad B\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$

$x^2+y^2=k$ とおくと $k$ は原点を中心とする円の半径の2乗の値。

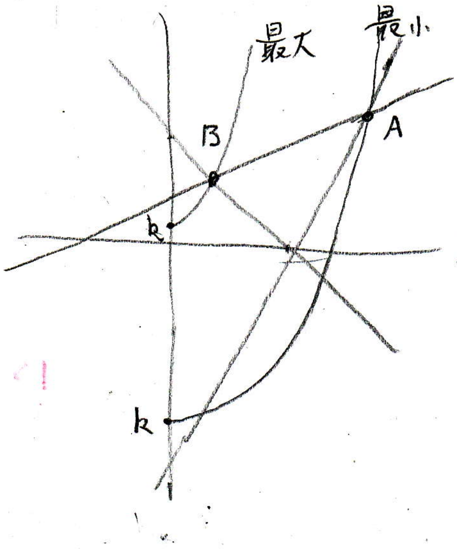
ということは原点を中心とする半径が最大になる点を求めると点Aのときである。このとき半径 $r_1^2$

$r_1^2=\left(\frac{5}{3}\right)^2+\left(\frac{4}{3}\right)^2=\frac{41}{9}=k$ 　最大値 $\frac{41}{9}$ $\left(x=\frac{5}{3}, y=\frac{4}{3}\right)$

また円の半径が最小となるときは直線③に接するときでその半径 $r_2$ は $r_2=\frac{|-1|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\therefore r_2^2=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2=\frac{1}{2}$ このとき $x=\frac{1}{2}, y=\frac{1}{2}$ 　最小値 $\frac{1}{2}$ $\left(x=y=\frac{1}{2}\right)$

(2) $y-x^2=k$ として $y=x^2+k$ の放物線とDの関係を調べる




$\therefore$ $B\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ のとき最大でその値は $\frac{2}{3}-\frac{1}{9}=\frac{5}{9}$

$A\left(\frac{5}{3}, \frac{4}{3}\right)$ のとき最小でその値は $\frac{4}{3}-\frac{25}{9}=-\frac{13}{9}$

答 最大値 $\frac{5}{9}$ $\left(x=\frac{1}{3}, y=\frac{2}{3}\right)$

最小値 $-\frac{13}{9}$ $\left(x=\frac{5}{3}, y=\frac{4}{3}\right)$