図と式23

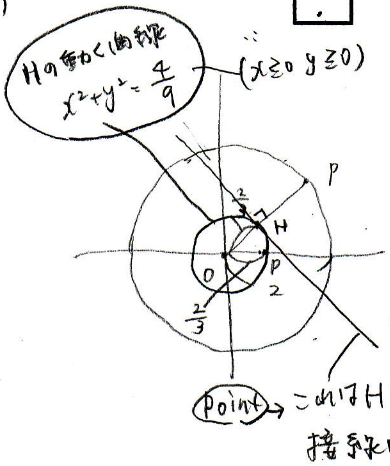
xy 平面において, O は原点, P は曲線 $x^2+y^2=4$ $(x \geqq 0, y \geqq 0)$ 上を点 $(2,\ 0)$ から点 $(0,\ 2)$ まで動く点とする。OP を 1 : 2 に内分する点を H とする。H を通り OP に垂直な直線と放物線 $y=x^2-\dfrac{13}{3}$ との交点で, x 座標が正の交点を Q とする。

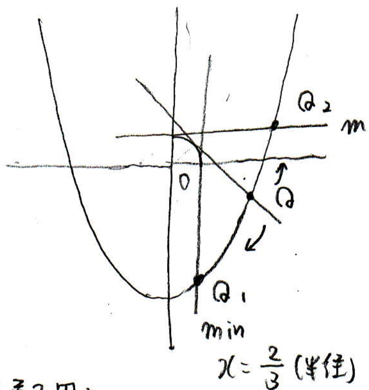
(1) Q の x 座標のとりうる値の範囲は $\dfrac{\boxed{}}{\boxed{}} \leqq x \leqq \sqrt{\boxed{}}$ である。

(2) △OPQ の面積が最小となるときの Q の x 座標は $\dfrac{\boxed{}}{\boxed{}}$ であり, このときの △OPQ の面積は $\dfrac{\sqrt{\boxed{}}}{\boxed{}}$ である。

〔慶応大〕

(1)





左図より xの最小は $\frac{2}{3}$で

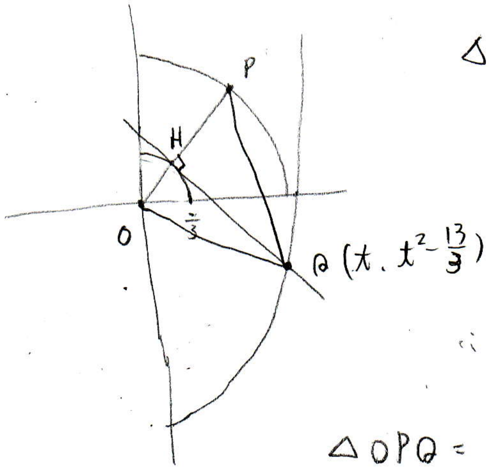
最大は $y=x^2-\frac{13}{3}$ で $y=\frac{2}{3}$として

$\frac{2}{3}=x^2-\frac{13}{3}$ $x^2=5$ $x=\pm\sqrt{5}$

$x\geqq 0$ より $x=\sqrt{5}$

∴ $\frac{2}{3}\leqq x\leqq\sqrt{5}$

(2)



$\triangle OPQ=\frac{1}{2}OP\cdot QH$

ここで Qの座標を $\left(t,\ t^2-\frac{13}{3}\right)$として

$QH=\sqrt{OQ^2-OH^2}$ より

$=\sqrt{t^2+\left(t^2-\frac{13}{3}\right)^2-\frac{4}{9}}$

∴ $\triangle OPQ=\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{t^2+\left(t^2-\frac{13}{3}\right)^2-\frac{4}{9}}$

$\triangle OPQ=\sqrt{t^4-\frac{23}{3}t^2+\frac{165}{9}}=\sqrt{\left(t^2-\frac{23}{6}\right)^2+\frac{131}{36}}$

$t^2=\frac{23}{6}$ すなわち $t=\sqrt{\frac{23}{6}}$ のとき最小値 $\sqrt{\frac{131}{36}}$ ($0\leqq t\leqq\sqrt{5}$をみたしている)

∴ $t=\frac{\sqrt{138}}{6}$ のとき 最小値 $\frac{\sqrt{131}}{6}$ となる