

図と式25

円 $x^2 + y^2 - 4ax - 2ay + 20a - 25 = 0$ は、定数 a の値にかかわらず2つの定点を通る。
 その2つの定点を求めよ。 [東京薬科大改]

与式を整理すると

$$x^2 + y^2 - 25 + a(-4x - 2y + 20) = 0$$

これが a の値にかかわらず成り立つためには

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 25 = 0 \dots ① \\ -4x - 2y + 20 = 0 \dots ② \end{cases}$$

②より $2x + y - 10 = 0$

$y = -2x + 10$ とし ①に代入すると

$$x^2 + (-2x + 10)^2 - 25 = 0$$

$$x^2 + 4x^2 - 40x + 100 - 25 = 0$$

$$5x^2 - 40x + 75 = 0$$

$$x^2 - 8x + 15 = 0$$

$$(x - 3)(x - 5) = 0$$

$$x = 3, 5 \quad x = 3 \text{ のとき } y = 4, \quad x = 5 \text{ のとき } y = 0$$

よって

$(3, 4), (5, 0)$ を通る