図と式 26

OK

$x^2+y^2-6ax+4ay+19a^2-a-1=0$ (a は定数) は円を表すものとする。

(1) a の値の範囲は $\dfrac{\square}{\square} < a < \dfrac{\square}{\square}$

(2) この円の面積が最大となるとき, 円の中心の座標は $\left(\dfrac{\square}{\square}, \dfrac{\square}{\square}\right)$ であり, 最大面積は $\dfrac{\square}{\square}\pi$ となる。

このとき, 座標 $\left(-\dfrac{1}{3}, 1\right)$ を通り, 円の面積を二等分する式は

$$y=-\square x+\frac{\square}{\square}$$

である。

〔北海道薬科大〕

(1)

$x^2+y^2-6ax+4ay+19a^2-a-1=0$ より

$(x-3a)^2-9a^2+(y+2a)^2-4a^2+19a^2-a-1=0$

$(x-3a)^2+(y+2a)^2=-6a^2+a+1$ となり 右辺の $-6a^2+a+1$ は正であることから

$-6a^2+a+1>0$ $6a^2-a-1<0$ $(3a+1)(2a-1)<0$ より

$-\frac{1}{3}<a<\frac{1}{2}$

(2) 面積が最大 → 半径が最大なので

$f(a)=-6a^2+a+1$ $f(a)=-6\left(a-\frac{1}{12}\right)^2+\frac{25}{24}$ となり $a=\frac{1}{12}$ で最大値 $\frac{25}{24}$ となる

このとき中心は $\left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{6}\right)$ 半径は $\sqrt{\frac{25}{24}}$ となるので $\frac{25}{24}\pi$ が最大の面積となる

求める直線は $\left(-\frac{1}{3}, 1\right)$ と中心 $\left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{6}\right)$ を通るので

式を求めると

$\dfrac{1-\left(-\frac{1}{6}\right)}{-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}}=\dfrac{12+2}{-4-3}=-2$ $y=-2x+\frac{1}{3}$