図と式 3

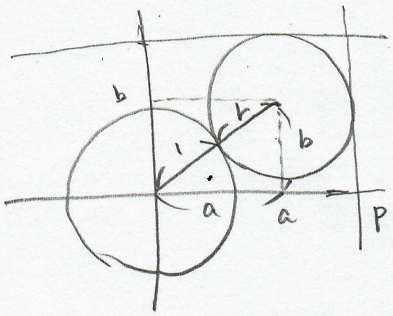
円 $x^2+y^2=1$ に外接し, かつ直線 $y=2$ にも接する円 C の半径を r, 中心を (a,b) とする。

(1) 円 C の中心の座標 a,b をそれぞれ r の式で表わせ。

(2) $a>0, b>0$ として, 上の円 C がさらに直線 $x=p$ の左側にあり, 直線 $x=p$ にも接している。このとき, 円 C の半径 r を p の式で表わせ。

(3) 上の (2) の場合, 円 C の半径 r はどのような範囲の値となりうるか。

〔東京理大〕



(1)

$a^2+b^2=(1+r)^2$

$b+r=2$

$b=2-r$

$a^2+(2-r)^2=(1+r)^2$

$a^2+4-4r+r^2=1+2r+r^2$

$a^2=6r-3$

$a=\pm\sqrt{6r-3}$

$\therefore\ a=\pm\sqrt{6r-3}\quad b=2-r$

(2)

$a>0$ より $a=\sqrt{6r-3}$　$6r-3>0$　$6r>3$　$r>\frac{1}{2}$

$b>0$ より $2-r>0$　$r<2$

$a+r=p$ より　$\sqrt{6r-3}+r=p$

$\sqrt{6r-3}=p-r$ 両辺2乗して

$6r-3=(p-r)^2 \rightarrow p^2-2pr+r^2-6r+3=0$

$r^2-2r(p+3)+p^2+3=0$

$\therefore\ r=(p+3)\pm\sqrt{(p+3)^2-p^2-3}$

$r=p+3\pm\sqrt{6p+6}$

$\therefore\ r<p$ より

$r=p+3-\sqrt{6p+6}$

(3)

(2) のとき

$a=\sqrt{6r-3}>0$ より $r>\frac{1}{2}$

$b=2-r>0$ より $r<2$

$\therefore\ \frac{1}{2}<r<2$