図と式 33

xy 平面の原点を中心とする半径 2 の円を C とする。円 C に接し, 傾きが 2 で y 軸との交点の y 座標が負の値をとる直線を g とするとき, 次の問いに答えよ。

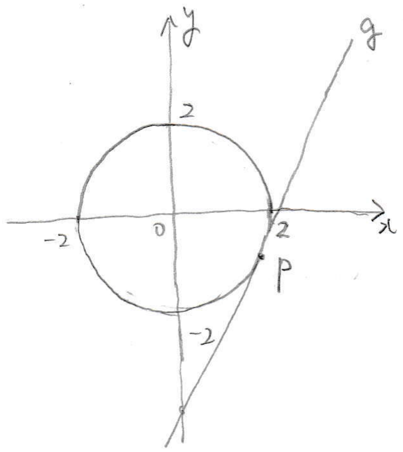
(1) 直線 g の方程式を求めよ。

(2) 半径が 1 で, 円 C と直線 g の両方に接するすべての円の中心の座標を求めよ。

(3) (2) で求めたすべての円の中心を結んでできる多角形の面積を求めよ。

〔秋田大〕

(1)



求める直線 g を $y=2x-b$ とおく

$b>0$ として、直線 g と円 C との接点を P とすると

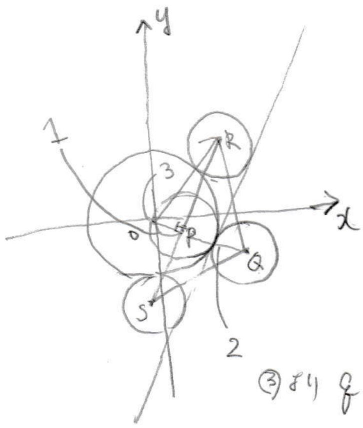
$OP=2$ であるから　$-2x+y+b=0$ より

$\dfrac{b}{\sqrt{5}}=2$　∴ $b=2\sqrt{5}$

従って求める直線 g の式は $y=2x-2\sqrt{5}$

(2) 中心の座標を (p,q) とすると $\sqrt{p^2+q^2}=1$ かつ $\sqrt{p^2+q^2}=3$ が条件.

これより $p^2+q^2=1$ …①　$p^2+q^2=9$ …②



直線 g との距離が 1 でもよいので

$\dfrac{|-2p+q+2\sqrt{5}|}{\sqrt{5}}=1$

$|-2p+q+2\sqrt{5}|=\sqrt{5}$ より　$-2p+q+2\sqrt{5}=\pm\sqrt{5}$ となり

$-2p+q=-3\sqrt{5}$,　$-2p+q=-\sqrt{5}$ より

$2p-q=3\sqrt{5}$ …③,　$2p-q=\sqrt{5}$ …④

③より $q=2p-3\sqrt{5}$ …③', ④より $q=2p-\sqrt{5}$ …④'

①と③'より　$p^2+(2p-3\sqrt{5})^2=1$　　$5p^2-12\sqrt{5}p+44=0$　これは実数解をもたない.

①と④'より　$p^2+(2p-\sqrt{5})^2=1$　　$5p^2-4\sqrt{5}p+4=0$　$(\sqrt{5}p-2)^2=0$　$p=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$, $q=-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

②と③'より　$p^2+(2p-3\sqrt{5})^2=9$　　$5p^2-12\sqrt{5}p+36=0$　$(\sqrt{5}p-6)^2=0$　$p=\dfrac{6\sqrt{5}}{5}$, $q=-\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$

②と④'より　$p^2+(2p-\sqrt{5})^2=9$　　$5p^2-4\sqrt{5}-4=0$　$p=\dfrac{2\sqrt{5}\pm2\sqrt{10}}{5}$　, $q=\dfrac{-\sqrt{5}\pm4\sqrt{10}}{5}$

以上より求める中心は　$\left(\dfrac{2\sqrt{5}}{5}, -\dfrac{\sqrt{5}}{5}\right)$, $\left(\dfrac{6\sqrt{5}}{5}, -\dfrac{3\sqrt{5}}{5}\right)$, $\left(\dfrac{2\sqrt{5}\pm2\sqrt{10}}{5}, \dfrac{-\sqrt{5}\pm4\sqrt{10}}{5}\right)$ 複号同順

$P\left(\dfrac{2\sqrt{5}}{5}, -\dfrac{\sqrt{5}}{5}\right)$, $Q\left(\dfrac{6\sqrt{5}}{5}, -\dfrac{3\sqrt{5}}{5}\right)$, $R\left(\dfrac{2\sqrt{5}+2\sqrt{10}}{5}, \dfrac{-\sqrt{5}+4\sqrt{10}}{5}\right)$, $S\left(\dfrac{2\sqrt{5}-2\sqrt{10}}{5}, \dfrac{-\sqrt{5}-4\sqrt{10}}{5}\right)$

とすると P, S, R は一直線上にあり、求める図形は三角形となり.

$PR=\sqrt{3^2-1}=2\sqrt{2}$ より $SR=2PR=4\sqrt{2}$, $PQ=2$ であるから、求める面積は $4\sqrt{2}\times2\times\dfrac{1}{2}=4\sqrt{2}$