図と式34

xy 平面において, 原点 O を中心とする半径 $r(r>0)$ の円 C と点 $\mathrm{P}(a,0)(a>r)$ を考える。点 P から円 C に引いた二つの接線について, その接点で y 座標が正であるものを A とし, 負であるものを B とする。このとき, 次の各問に答えよ。

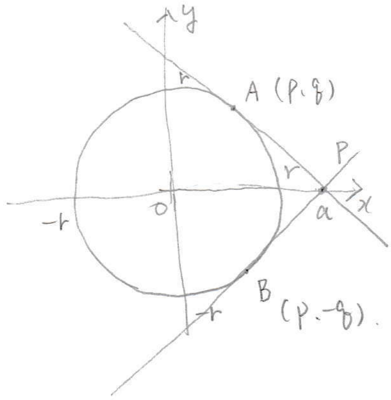
(1) A, B の座標を a, r を用いて表せ。

(2) 四角形 PAOB の面積 S を a, r を用いて表せ。

(3) a を固定し, r を $0<r<a$ の範囲で動かす。このとき, S の最大値およびそれを与える r を a を用いて表せ。

(4) S が (3) で求めた最大値であるとき, $\log_2 S = (\log_2 a)^2$ となる a の値を求めよ。

〔山形大〕



(1) 円の方程式は

$x^2+y^2=r^2$　接点は $A(p, q)$, $B(p, -q)$ とおけるので

接線 PA の式は ($\because q>0$)

$px+qy=r^2$　これが $(a, 0)$ を通ることより

$pa=r^2$　　$p=\dfrac{r^2}{a}$ …①

また

$p^2+q^2=r^2$ より①から $\dfrac{r^4}{a^2}+q^2=r^2$

$q^2=\dfrac{a^2r^2-r^4}{a^2}$　$\therefore$ $q=\dfrac{r\sqrt{a^2-r^2}}{a}$ $(q>0)$

ゆえに $A\left(\dfrac{r^2}{a}, \dfrac{r\sqrt{a^2-r^2}}{a}\right)$, $B\left(\dfrac{r^2}{a}, -\dfrac{r\sqrt{a^2-r^2}}{a}\right)$

(2) 四角形 $PAOB=\triangle OAP\times 2 = a\times\dfrac{r\sqrt{a^2-r^2}}{a}\times\dfrac{1}{2}\times 2 = r\sqrt{a^2-r^2}$

$\therefore$ $S=r\sqrt{a^2-r^2}$

(3) $S=\sqrt{a^2r^2-r^4}$ とし $f(r)=a^2r^2-r^4$ を考える ($\because r>0$)

$f'(r)=2a^2r-4r^3=2r(a^2-2r^2)$,　　$2r^2=a^2$ つまり $r=\dfrac{a}{\sqrt{2}}$ で極値をとる

増減表をかくと

r	0	$\cdots$	$\frac{a}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	a
$f'(r)$	/	$+$	0	$-$	/
$f(r)$	/	↗	$\frac{a^4}{4}$	↘	/

$\therefore$ S は $r=\dfrac{a}{\sqrt{2}}$ のとき極大かつ最大でその値は $\dfrac{a^2}{2}$

$\sqrt{-\left(r^2-\dfrac{a^2}{2}\right)^2+\dfrac{a^4}{4}}$ とした方がよかったかも…orz

(4) $\log_2\dfrac{a^2}{2}=(\log_2 a)^2 \rightarrow (\log_2 a)^2-2\log a+1=0$

$(\log_2 a-1)^2=0$ より $\log_2 a=1$ であるから

$a=2$