図と式35

xy 平面上に 2 つの放物線 $C_1 : y = x^2 - 2$ と $C_2 : x = y^2 - 2$ がある。次の問いに答えよ。

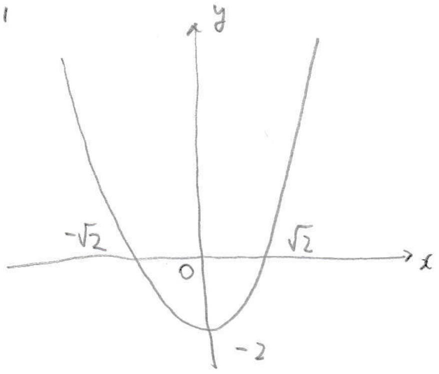
(1) C_1, C_2 の概形をかけ。

(2) C_1 と C_2 のすべての交点の座標を求めよ。

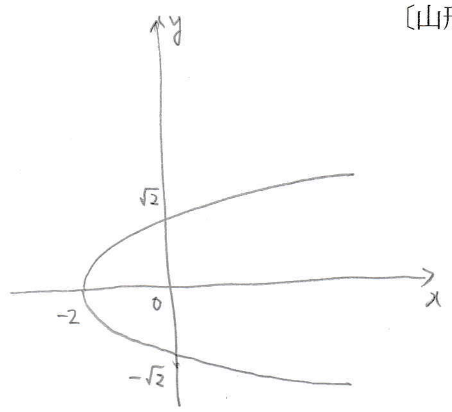
(3) C_1 と C_2 のすべての交点を通る円が存在することを証明し，その中心と半径を求めよ。

〔山形大〕

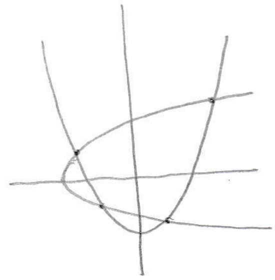
(1) C_1



C_2



(2)



$y=x^2-2$ を $x=y^2-2$ に代入すると

$x=(x^2-2)^2-2$

$x^4-4x^2-x+2=0$

$(x+1)(x^3-x^2-3x+2)=0$

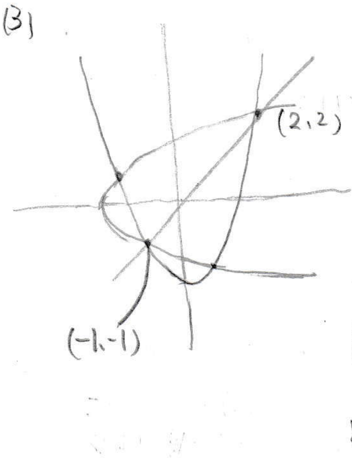
$(x+1)(x-2)(x^2+x-1)=0$

$x^2+x-1=0$ より $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$

$\therefore x=-1,\ 2,\ \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2},\ \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$ であり、交点の座標はそれぞれ

$(-1,-1),\ (2,2),\ \left(\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}, \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}\right),\ \left(\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}, \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$

(3)



図形の性質より中心は $y=x$ 上にあり 2点 $(-1,-1),(2,2)$ の中点である $\therefore$ 中心 $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$，半径は

$\sqrt{\left(2-\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(2-\dfrac{1}{2}\right)^2} = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ となり，このとき

$\sqrt{\left(\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}-\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(\dfrac{-1\mp\sqrt{5}}{2}-\dfrac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{\dfrac{18}{4}} = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ と先の半径と一致する

よって 4点をすべて通る円が存在し，その式は

$\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(y-\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{18}{4}$ となる $\therefore$ 中心 $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$ 半径 $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$