図と式36

ok

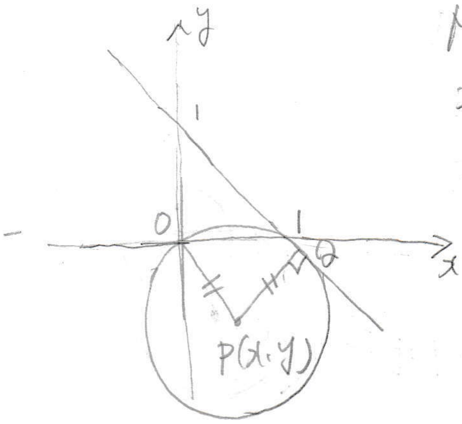
原点 O(0, 0) を通り, 直線 $x+y=1$ に接する円の中心を描く軌跡を M とするとき, 次の問いに答えよ。

(1) M の方程式を求めよ。

(2) 点 $\mathrm{P}(x, y)$ が M 上を動くとき, $2x+y$ の最大値を求めよ。

〔宇都宮大〕

(1)



M上の点をP(x, y)とする,円と直線

$x+y-1=0$ との接点をQとすると

OP = PQ であるから

$$\sqrt{x^2+y^2}=\frac{|x+y-1|}{\sqrt{1+1}}$$

$\sqrt{2(x^2+y^2)}=|x+y-1|$ 両辺2乗して

$2(x^2+y^2)=(x+y-1)^2$ $\quad 2x^2+2y^2=x^2+2xy+y^2-2x-2y+1$

$x^2-2xy+y^2+2x+2y-1=0$

$(x-y)^2+2(x+y)=1$ …①

(2) $2x+y=k$ とおく $y=k-2x$ より (1)の①に代入して

$(3x-k)^2+2(k-x)=1$

$9x^2-6kx+k^2+2k-2x-1=0$

$9x^2-2(3k+1)x+k^2+2k-1=0$ これが実数解をもつ条件は

$(3k+1)^2-9(k^2+2k-1)\geqq 0$

$9k^2+6k+1-9k^2-18k+9\geqq 0$

$-12k\geqq -10$

$k\leqq \frac{5}{6}$ となり k の最大値は $\frac{5}{6}$

ok