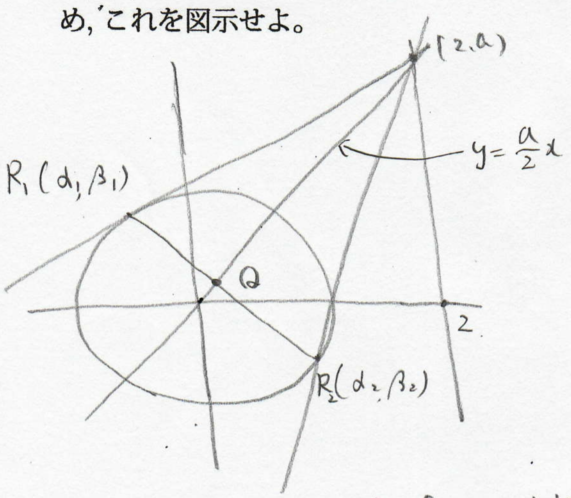
図と式4

次の問いに答えよ。

(1) 円 $x^2+y^2=1$ の周上の点 (α,β) におけるこの円の接線の方程式を求めよ。

(2) 点 $\mathrm{P}(2,a)$ から円 $x^2+y^2=1$ に 2 本の接線を引き，2 つの接点の中点を Q とする。点 $\mathrm{P}(2,a)$ が直線 $x=2$ 上の $y>0$ の部分を動くとき，点 Q のえがく図形の方程式をもとめ，これを図示せよ。

〔東京電機大〕



(1) $\alpha x+\beta y=1$ //

接点を $R_1(\alpha_1,\beta_1)$，$R_2(\alpha_2,\beta_2)$ とすると $Q\left(\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2},\frac{\beta_1+\beta_2}{2}\right)=(X,Y)$ とおく

このとき R_1，R_2 における接線はそれぞれ

$\begin{cases}\alpha_1x+\beta_1y=1\\ \alpha_2x+\beta_2y=1\end{cases}$ これらが $(2,a)$ を通るから $\begin{cases}2\alpha_1+a\beta_1=1 & \cdots① \\ 2\alpha_2+a\beta_2=1 & \cdots②\end{cases}$

①＋②より $2(\alpha_1+\alpha_2)+a(\beta_1+\beta_2)=2$ …③

ここで $\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}=X$ より $\alpha_1+\alpha_2=2X$，$\frac{\beta_1+\beta_2}{2}=Y$ より $\beta_1+\beta_2=2Y$ であるから③は

$4X+2aY=2 \rightarrow 2X+aY=1$ …④

また点 Q は直線 $y=\frac{a}{2}x$ 上にあるので $Y=\frac{a}{2}X$ であり $a=\frac{2Y}{X}$ となる。これより

④は

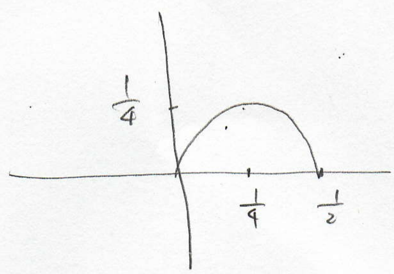
$2X+\frac{2Y^2}{X}=1$

$2X^2+2Y^2=X$

$X^2-\frac{1}{2}X+Y^2=0$

$\left(X-\frac{1}{4}\right)^2+Y^2=\frac{1}{16}$

$Y>0$



//

∴ $\left(x-\frac{1}{4}\right)^2+y^2=\frac{1}{16}$ $(y>0)$