図と式 6

次の問 (1), (2) に答えよ。

(1) 連立不等式 $\begin{cases} x^2+y^2-4(x+y)+7 \leqq 0 \cdots ① \\ x+y \geqq 3 \cdots ② \end{cases}$ の表わす領域 D を図示せよ。

(2) 点 (x, y) が D を動くとき $\dfrac{y+1}{x-5}$ の最大値, 最小値を求めよ。

〔立教大〕

(1) ①は $(x-2)^2+(y-2)^2 \leqq 1$

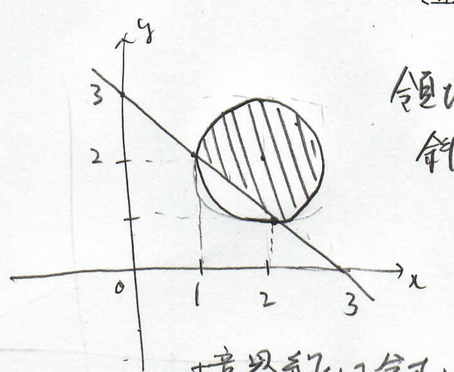
②は $y \geqq -x+3$

$(x-2)^2+(-x+1)^2=1$

$x^2-4x+4+x^2-2x+1=1$

$2x^2-6x+4=0$

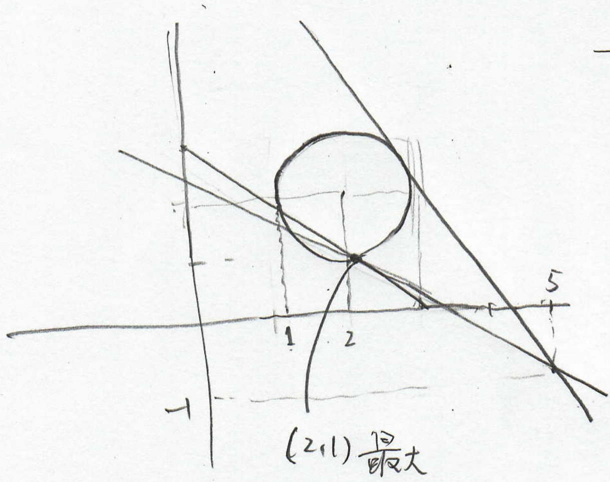
$2(x-1)(x-2)=0$



領域Dは斜線部

境界線は含む

(2) $\dfrac{y+1}{x-5}$ を傾きとみる 傾きは負なので 点(2,1)を通るとき最大で 円 $(x-2)^2+(y-2)^2=1$ に接するとき最小



$\dfrac{y+1}{x-5}=a$ とおいて

$y+1=a(x-5)$

$ax-y-5a-1=0$ この直線への点(2,2)からの距離は

$\dfrac{|2a-2-5a-1|}{\sqrt{a^2+1}}=\dfrac{|-3a-3|}{\sqrt{a^2+1}}$ …①

①が1のとき接するので

$\dfrac{|-3a-3|}{\sqrt{a^2+1}}=1 \to |-3a-3|=\sqrt{a^2+1}$

$(3a+3)^2=a^2+1$

$9a^2+18a+9=a^2+1$

$8a^2+18a+8=0$

$4a^2+9a+4=0$

$a=\dfrac{-9\pm\sqrt{81-64}}{8}=\dfrac{-9\pm\sqrt{17}}{8}$

グラフの傾きが急な方が最小の値なので

最小値は $\dfrac{-9-\sqrt{17}}{8}$

最大値は (2,1)を通るときなので

$\dfrac{1+1}{2-5}=-\dfrac{2}{3}$

(答) 最大値 $-\dfrac{2}{3}$, 最小値 $\dfrac{-9-\sqrt{17}}{8}$