図と式 9

連立不等式 $\begin{cases} (x-4)^2+(y-2)^2 \leqq 4 \\ 2y \leqq x \end{cases}$ が表わす領域を D とする。このとき，次の問いに答えよ。

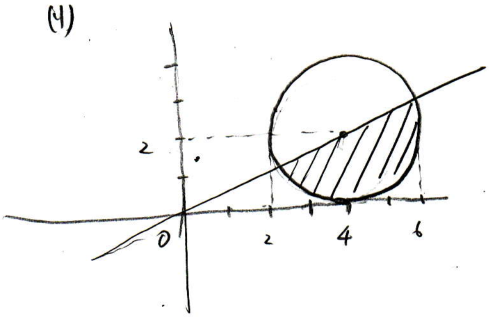
(1) D を図示せよ。

(2) 点 $\mathrm{P}(x, y)$ が D を動くとき，$2x+y$ の最大値および最小値を求めよ。

(3) a を定数とするとき，D と直線 $y-ax+2=0$ が共有点をもつ a の値の範囲を求めよ。

〔愛知教育大〕

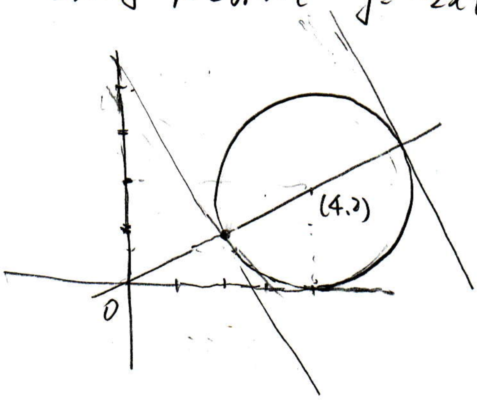
(1)



左図 境界線は含む

(2)

$2x+y=k$ とおいて $y=-2x+k$ の切片を考える



$2x+y-k=0$ として中心からの距離を考えると

$\dfrac{|8+2-k|}{\sqrt{4+1}}=2$ より $|10-k|=2\sqrt{5}$ であるから

$(10-k)^2=20$

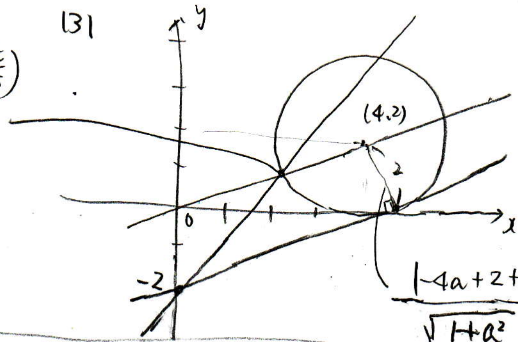
$10-k=\pm 2\sqrt{5}$ $k=10\pm 2\sqrt{5}$

∴ 最大値は $10+2\sqrt{5}$

最小値は $10-2\sqrt{5}$

(3)

$\left(4-\frac{4}{\sqrt{5}},\ 2-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$



$y=ax-2 \leftarrow \left(4-\frac{4}{\sqrt{5}},\ 2-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ を代入

$2-\frac{2}{\sqrt{5}}=\left(4-\frac{4}{\sqrt{5}}\right)a-2$ $\quad 4-\frac{2}{\sqrt{5}}=\left(4-\frac{4}{\sqrt{5}}\right)a$

$4\sqrt{5}-2=(4\sqrt{5}-4)a$

$a=\dfrac{2\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}-2}=\dfrac{9+\sqrt{5}}{8}$

$\dfrac{|-4a+2+2|}{\sqrt{1+a^2}}=2 \rightarrow (-4a+4)^2=4(1+a^2)$

$4(-a+1)^2=1+a^2$

$4(a^2-2a+1)=1+a^2$

$4a^2-8a+4=1+a^2$

$3a^2-8a+3=0$ $\quad a=\dfrac{4\pm\sqrt{16-9}}{3}=\dfrac{4\pm\sqrt{7}}{3}$

値は小さい方なので $\dfrac{4-\sqrt{7}}{3}$

交点は $(2y-4)^2+(y-2)^2=4$

$4y^2-16y+16+y^2-4y+4=4$

$5y^2-20y+16=0$

$5(y-2)^2-4=0$

$(y-2)^2=\frac{4}{5}$ $\quad y-2=\pm\frac{2}{\sqrt{5}}$

$y=2\pm\frac{2}{\sqrt{5}}$ $\quad$ ∴ $x=4\pm\frac{4}{\sqrt{5}}$

∴ $\dfrac{4-\sqrt{7}}{3} \leqq a \leqq \dfrac{9+\sqrt{5}}{8}$