円Cの式を

$(x-a)^2+(y-3)^2=9$ とおく

このとき $P(t, t^2)$ と円Cを原点に

移すと

C' $x^2+y^2=9$

P' $(t-a, t^2-3)$ となる $t \neq 0$ とする

このとき円C'の点P'における接線は

$(t-a)x+(t^2-3)y=9$ であり

これをもとのPの接線に変換すると

$(t-a)(x-a)+(t^2-3)(y-3)=9$

$(t-a)x-a(t-a)+(t^2-3)y-3(t^2-3)=9$

$(t^2-3)y=-(t-a)x+a(t-a)+3(t^2-3)+9$

$y=-\dfrac{t-a}{t^2-3}x+\dfrac{a(t-a)+3t^2}{t^2-3}$

これが $y=2tx-t^2$ と一致するから

$2t=-\dfrac{t-a}{t^2-3}$ …① $\dfrac{a(t-a)+3t^2}{t^2-3}=-t^2$ …②

①より

$-2t(t^2-3)=t-a$

$a=2t(t^2-3)+t$

これを②に代入して

$\dfrac{(2t(t^2-3)+t)(-2t(t^2-3))+3t^2}{t^2-3}=-t^2$

$-4t^2(t^2-3)-2t^2+\dfrac{3t^2}{t^2-3}=-t^2$

$-4t^2(t^2-3)^2-2t^2(t^2-3)+3t^2=-t^2(t^2-3)$

$4t^2(t^2-3)^2-t^2(t^2-3)+3t^2=0$

$t^2\{\underbrace{4(t^2-3)^2-(t^2-3)+3}\}=0$ …③

$t^2-3=X$ とおくと

$4X^2-X-3=0$

$(4X-3)(X+1)=0$

つまり③は

$t^2(4t^2-15)(t^2-2)=0$

$t=0, \pm\dfrac{\sqrt{15}}{2}, \pm\sqrt{2}$

$(x-a)^2+(y+3)^2=9$ とおくと

$t=0$ 以外の実数解はない

よって

$t=0, \pm\dfrac{\sqrt{15}}{2}, \pm\sqrt{2}$