2013 高知大

$x^2+y^2-6y-16 \leqq 0$

$x^2+(y-3)^2 \leqq 25 \cdots ①$

$y \geqq -3x+8 \cdots ②$

これより

$x^2+(y-3)^2=25$ と $y=-3x+8$ の交点を求めると

$x^2+(-3x+5)^2=25$

$x^2+9x^2-30x+25=25$

$10x^2-30x=0$

$10x(x-3)=0$

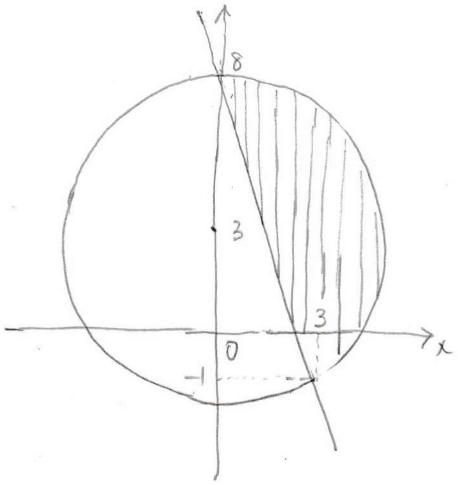
$x=0, 3$

よって、

交点は $(0, 8), (3, -1)$

以上より領域 D は以下の斜線部

境界線は含む



$y-2x=k$ とおくと

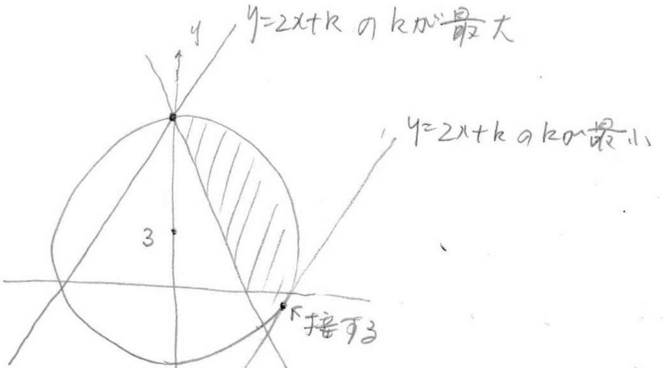
$y=2x+k$ と変形でき、

k は $y=2x+k$ の切片と考えることができる。

$y=2x+k$ は領域 D を動くので このとき

k の最大値と最小値は右図の

ようになる



$-2x+y-k=0$ と円の中心

$(0, 3)$ との距離が半径 5 なので

$$\frac{|3-k|}{\sqrt{4+1}}=5$$

$|3-k|=5\sqrt{5}$

$3-k=\pm 5\sqrt{5}$

$k=3\pm 5\sqrt{5}$

$k<0$ より $k=3-5\sqrt{5}$

したがって最大値は $(0, 8)$ を通るときで、このとき

$k=8$

最小値は $y=2x+k$ が円に接するときで、このとき

$k=3-5\sqrt{5}$ となる

最大値 8、最小値 $3-5\sqrt{5}$