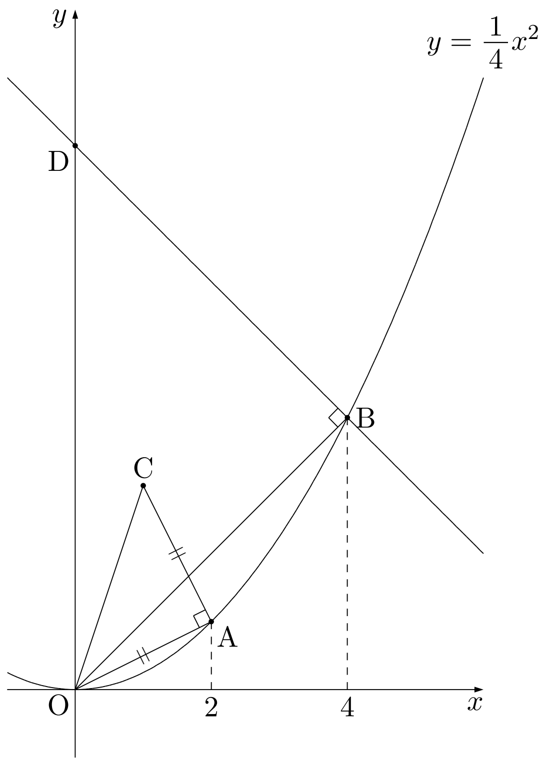
右図のように、x 座標がそれぞれ 2,4 である 2 点 A,B を、関数 $y=\frac{1}{4}x^2$ のグラフ上にとり、$\angle A=90^\circ$ で、AO=AC である直角三角形 OAC をつくる。また、点 B を通り、線分 BO に垂直な直線が y 軸と交わる点を D とする。(1)〜(4) に答えなさい。



(1) 点 B の y 座標を求めなさい。

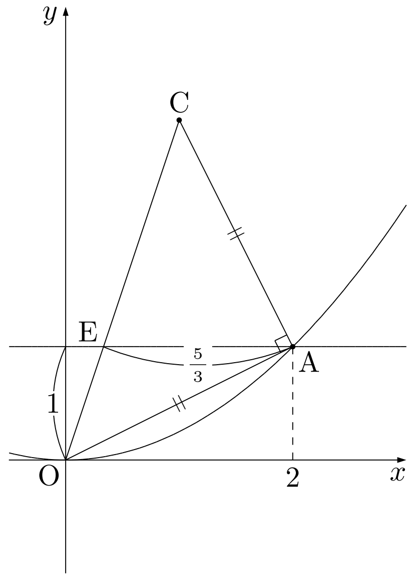
(2) 直線 BD の式を求めなさい。

(3) 点 A を通り、x 軸に平行な直線と線分 OC との交点を E とするとき、△OAE の面積を求めなさい。

(4) x 軸に平行な直線 $y=m$ が △OAC の面積を 2 等分するとき、m の値を求めなさい。

〔H24 徳島〕

(3) の設問に関して、C の座標 (1,3) が図形の合同の性質を使って出せたという前提でお話しします。恐らく一般的な中学生の回答は次のように予想されます。まず、C(1,3) から直線 OC は $y = 3x \cdots$ ①、点 A(2,1) から点 A を通り x 軸に平行な直線は $y = 1 \cdots$ ② である。このことから交点 E は、①,②を連立方程式で解くと、$1 = 3x$



$x = \dfrac{1}{3}$

$\mathrm{E}\left(\dfrac{1}{3}, 1\right)$ となり AE の長さは

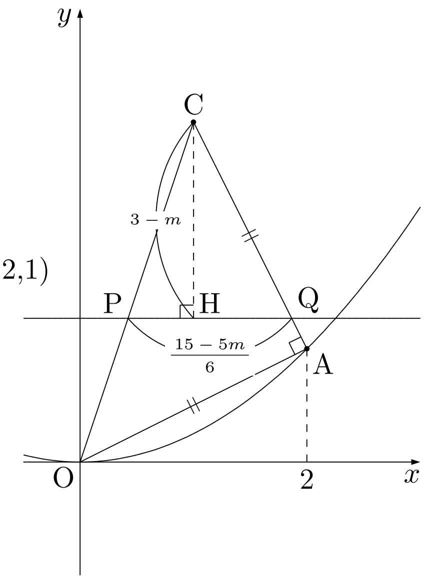
$2 - \dfrac{1}{3} = \dfrac{5}{3}$

よって、

$\triangle \mathrm{OAE} = \dfrac{5}{3} \times 1 \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{5}{6}$

$\dfrac{5}{6}$ ……(答)

(4) の設問に関して、(3) の解法を上のように解いた中学生のほとんどは次の解法で、回答を得たと思われる。



$\triangle \mathrm{OAC}$ の面積は

$\sqrt{5} \times \sqrt{5} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{5}{2}$

$\dfrac{1}{2}\triangle \mathrm{OAC} = \dfrac{5}{4}$

また、m は (3) より、$1 < m < 3$ の範囲にある。C(1,3),A(2,1) より、直線 CA の式は $y = -2x + 5 \cdots$ ③ となる。先の①より、直線 OC の式は $y = 3x$ であるから、この①,③と $y = m$ を使って、図の $\triangle \mathrm{OPQ}$ の面積が $\dfrac{5}{4}$ になるように、m の値を決める。そのためにまず P の座標を m を使って表すと、

$y = 3x, y = m$ より、$x = \dfrac{m}{3}$ よって、$\mathrm{P}\left(\dfrac{m}{3}, m\right)$

Q の座標を m を使って表すと、

$y = -2x + 5, y = m$ より、$x = \dfrac{5 - m}{2}$ よって、$\mathrm{Q}\left(\dfrac{5 - m}{2}, m\right)$

これより、

$PQ = \dfrac{5 - m}{2} - \dfrac{m}{3} = \dfrac{15 - 5m}{6}$

PQ を底辺とすると、高さは $3 - m$ であるから、

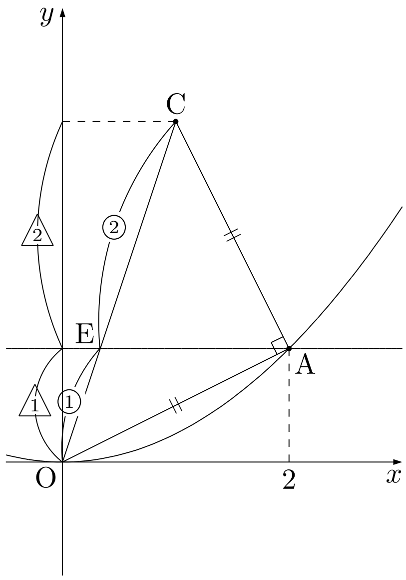
$\dfrac{15 - 5m}{6} \times (3 - m) \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{5}{4}$

$\dfrac{5(3 - m)}{6} \times (3 - m) \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{5}{4}$

$\dfrac{5}{12}(3 - m)^2 = \dfrac{5}{4}$

$(3-m)^2=3$
$3-m=\pm\sqrt{3}$
$m=3\pm\sqrt{3}$
$m=3+\sqrt{3}$ は問題に合わない。
よって、$m=3-\sqrt{3}$　……(答)
とにかく去年の図形の問題といい、非常に計算力が必要な問題となっています。解きなれている生徒なら、今回の解き方でも十分解答に至った気がしますが、45 分という短時間でこの回答にたどりつき、最後の図形問題まで完答しようとするなら、なかなか並大抵の勉強では難しいことを、ひしひしと感じました。

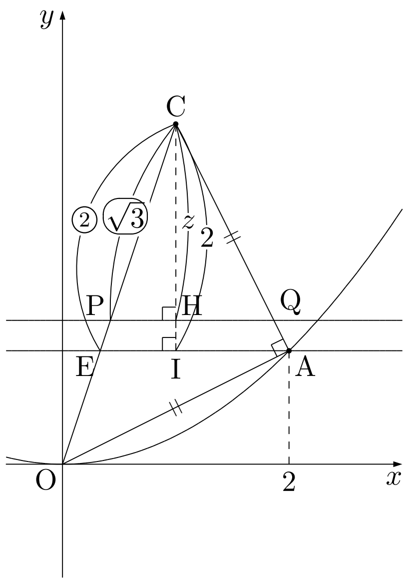
面積比を使いこなせば比較的簡単な計算で済むことが分かりました。
僕自身とりあえず先ほどの解法で答えを得ましたが、もう一度再考した結果、(3),(4) とも面積比で考えた方がすっきりしました。



(3) の設問
△OAC の面積は
$\sqrt{5} \times \sqrt{5} \times \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$
CE:EO=2:1 より、

$$\begin{aligned}\triangle \mathrm{OAE} &= \frac{1}{3}\triangle \mathrm{OAC} \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{5}{2} \\ &= \frac{5}{6} \quad \cdots\cdots (\text{答})\end{aligned}$$

(4) の設問
問題の条件を満たす △OAC の半分の面積の三角形を △CPQ とする。



$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\triangle \mathrm{OAC} &= \frac{1}{2} \times \frac{5}{2} \\ &= \frac{5}{4} \\ &= \triangle \mathrm{CPQ}\end{aligned}$$

$\triangle \mathrm{CPQ} = \frac{5}{4} \cdots$①
また、

$$\begin{aligned}\triangle \mathrm{CEA} &= \triangle \mathrm{OAC} - \triangle \mathrm{OAE} \\ &= \frac{5}{2} - \frac{5}{6} \\ &= \frac{5}{3} \cdots ②\end{aligned}$$

ここで、△CEA ∽ △CPQ でその面積比は①,②より、
$\frac{5}{3} : \frac{5}{4} = 4 : 3$
△CEA ∽ △CPQ の相似比を $x : y$ とすると、
$x^2 : y^2 = 4 : 3$ であるから、
$x : y = 2 : \sqrt{3} \cdots$③
点 C(1,3) の y 座標 3 と点 A(2,1) の y 座標 1 から CI=3−1=2、CH を z とすると、③より、
$2 : \sqrt{3} = 2 : z$
$z = \sqrt{3}$
これより H の y 座標は $3 - \sqrt{3}$ であるから、求める m は $3 - \sqrt{3}$

$m = 3 - \sqrt{3}$ ……(答)
このように、三角形の相似をうまく使い面積比から辺の比を導き、解くことで二次方程式を回避できる。45 分という短時間の中で、この解法を見つけた人は少数だと思いますが、先の解法にしてもなかなか受験生には手ごわい問題となっていたに違いないと思います。今回の入試問題の特徴は、まさに関数と図形であったということでしょう。