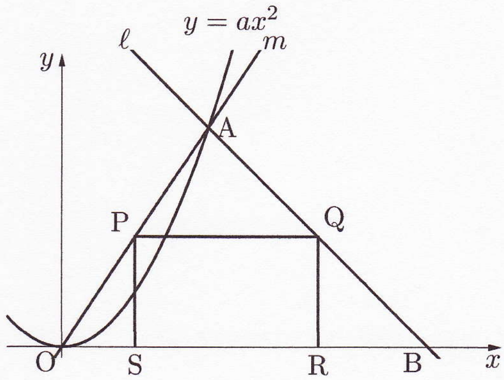
右の図のように, 点 A(4, 6) を通る放物線 $y = ax^2$ がある。点 B(10, 0) と点 A を通る直線を ℓ とし, 原点 O と点 A を通る直線を m とする。線分 OA 上に点 P, 線分 AB 上に点 Q, x 軸上に 2 点 R, S を四角形 PQRS が長方形となるようにとる。長方形の周の長さが 16 のとき, 次の各問いに答えよ。



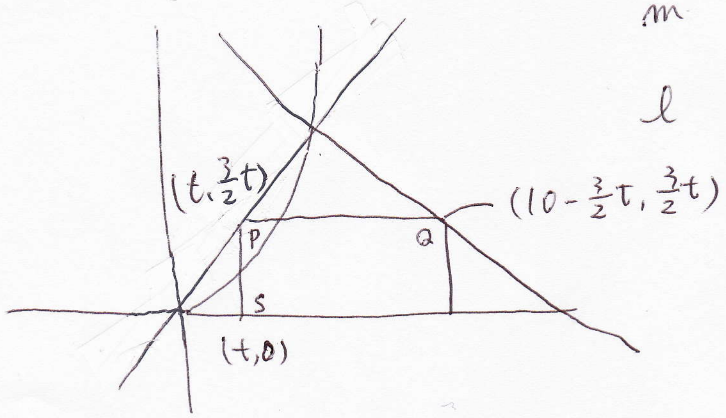
(1) 点 P の座標を求めよ。

(2) 線分 PS と $y = ax^2$ との交点を L とし, L を通って直線 m と垂直な直線と直線 m との交点を M とする。このとき, 線分 LM の長さを求めなさい。

(3) 直線 LM と y 軸との交点を N とする。LM : MN を最も簡単な整数の比で表わせ。

〔明治大学付属〕

(1)



$m \quad y = \frac{3}{2}x$

$\ell \quad y = -x+10$

S$(t, 0)$とおくと

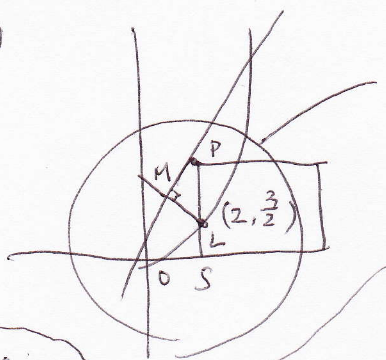
P$(t, \frac{3}{2}t)$

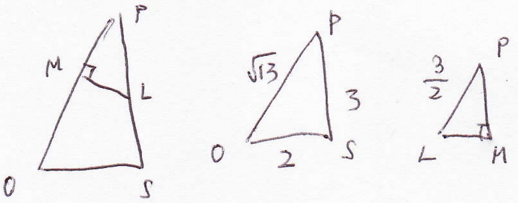
Q の y座標が P の y座標と等しいので

$\frac{3}{2}t = -x+10$ これより $x = 10 - \frac{3}{2}t$ ∴ Q$(10-\frac{3}{2}t, \frac{3}{2}t)$

PS + PQ = 8 より $\frac{3}{2}t + 10 - \frac{5}{2}t = 8$ $t = 2$ P$(2, 3)$

(2)





$\sqrt{13} : \frac{3}{2} = 2 : LM$

これより $LM = \frac{3\sqrt{13}}{13}$

(3) 直線LMの傾き $-\frac{2}{3}$ で L$(2, \frac{3}{2})$を通るので

直線LMの式は $y = -\frac{2}{3}x + \frac{17}{6}$ ∴ $NO = \frac{17}{6}$

$LP = \frac{3}{2}$ であり △LMP∽△NMO である

$LM : MN = LP : NO = \frac{3}{2} : \frac{17}{6} = 9 : 17$

9 : 17

(3)