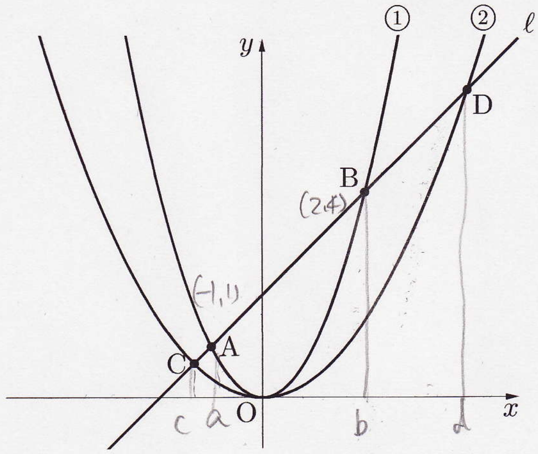
2つの放物線 $y=x^2\cdots$①, $y=kx^2\cdots$② がある。ただし, k は $0<k<1$ を満たす定数である。また, 直線 ℓ は, ①と2点A, Bで, ②と2点C, Dで交わっている。A, B, C, Dの x 座標をそれぞれ a,b,c,d とおくと, $a<b, c<d$ である。さらに△OACと△OBDの面積比は $1:6$ である。ただし, Oは原点である。

(1) △OACと△OBDの面積比が $1:6$ であることより, d を a,b,c のみを用いて表わせ。

(2) 直線ABと直線CDの傾きが等しいことより, $\dfrac{1}{k}$ を a,b,c のみを用いて表わせ。

(3) $a=-1, b=2$ のとき, c,k の値をそれぞれ求めよ。



〔灘〕

(1) △OACと△OBDの高さは原点Oから直線 ℓ におろした垂線になるので
面積比は

$a-c : d-b = 1:6$ と表せる

$d-b = 6a-6c$

$d = 6a+b-6c$ //

公式
$a+b=k(c+d)$ からでも
OK

(2) $A(a, a^2)$ $B(b, b^2)$ $C(c, kc^2)$ $D(d, kd^2)$ とすると

$\dfrac{a^2-b^2}{a-b} = \dfrac{kc^2-kd^2}{c-d} \rightarrow \dfrac{(a+b)(a-b)}{a-b} = \dfrac{k(c+d)(c-d)}{c-d} \rightarrow a+b = k(c+d)$

これより $\dfrac{1}{k} = \dfrac{c+d}{a+b}$ (1)より $\dfrac{1}{k} = \dfrac{c+6a+b-6c}{a+b}$ $\therefore \dfrac{1}{k} = \dfrac{6a+b-5c}{a+b}$ //

(3) $a=-1, b=2$ のとき 直線 ℓ は $y=x+2$ $C(c, kc^2)$ は直線 ℓ 上にあるから

$kc^2 = c+2 \rightarrow \dfrac{1}{k} = \dfrac{c^2}{c+2}$ (2)より $\dfrac{1}{k} = -4-5c$

等しい

$\dfrac{c^2}{c+2} = -4-5c$

$c^2 = (-4-5c)(c+2)$

$c^2 = -4c-8-5c^2-10c$

$6c^2+14c+8=0$

$3c^2+7c+4=0$

$c = \dfrac{-7\pm\sqrt{49-48}}{6} = \dfrac{-7\pm1}{6} = -\dfrac{4}{3}, -1$

$c=-1$ は不適

$c<-1$ であるから $c=-\dfrac{4}{3}$ //

$k = \dfrac{c+2}{c^2} = \left(-\dfrac{4}{3}+2\right) \div \left(-\dfrac{4}{3}\right)^2 = \dfrac{2}{3} \div \dfrac{16}{9} = \dfrac{2}{3} \times \dfrac{9}{16} = \dfrac{3}{8}$ //

$c = -\dfrac{4}{3}$, $k = \dfrac{3}{8}$ //