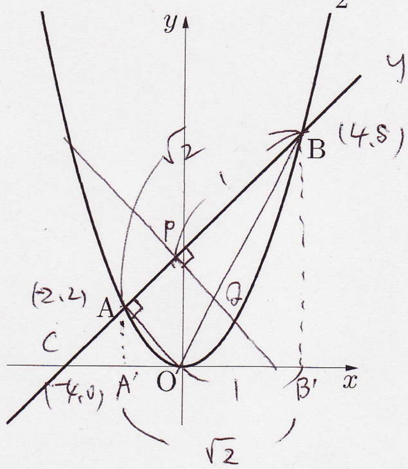
解説はできるだけ公立中学校のやり方でやっています

下の図のような放物線 $y=\frac{1}{2}x^2$ と直線 $y=x+b$ が 2 点 A, B で交わっている。点 A の x 座標が -2, 点 B の x 座標が 4 である。また, 点 O は原点である。このとき, 次の問いに答えなさい。



△BPQ∽△BAO

Pのx座標
$4-3\sqrt{2}$
↓
$y=x+4$に代入
↓
$y=8-3\sqrt{2}$

$OB'=\frac{1}{\sqrt{2}}\times 6=3\sqrt{2}$

P$(4-3\sqrt{2}, 8-3\sqrt{2})$

$y=-x+k$に代入
$k=12-6\sqrt{2}$

(1) 点 B の y 座標を求めなさい。

(2) △OAB = △PAB となる点 P の座標を求めなさい。ただし, 点 P は放物線 $y=\frac{1}{2}x^2$ 上の点 A から点 B の間にあり, 点 O とは異なる点とする。

(3) 直線 $t=x+b$ と x 軸の交点を C とするとき, △COB を x 軸を回転の軸として 1 回転してできる立体の体積を求めなさい。ただし円周率は π を使うこと。

(4) 直線 $y=-x+k$ について, 次の問いに答えなさい。

① 直線 $y=-x+k$ が線分 AB と交わるときの k がとる値の範囲を求めなさい。

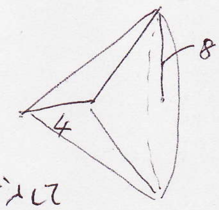
② 直線 $y=-x+k$ が △OAB の面積を 2 等分するときの k の値を求めなさい。

〔H25 徳島県第 3 回基礎学力テスト〕

(1) 8

(2) AB // OP となる P である。ABの傾き 1 であるから 直線OPはy=xより P の座標は P(t, t) とおける
Pは $y=\frac{1}{2}x^2$ 上にあるので $t=\frac{1}{2}t^2 \rightarrow t^2=2t$ $t(t-2)=0$ $t=0, 2$
よって P$(2, 2)$

(3) A$(-2,2)$より $b=4$ これより C$(-4,0)$ よって
B$(4,8)$



$64\pi\times4\times\frac{1}{3}=\frac{256}{3}\pi$

(4) ① A$(-2,2)$を代入して $2=2+k$ $k=0$, B$(4,8)$を代入して
$8=-4+k$ $k=12$
$0\leqq k\leqq 12$

② $y=x+4$ と $y=-x+k$ の交点を P, 直線OBと $y=-x+k$ の交点をQとすると △BPQ : 台形PQOA = 1 : 1
であるから △BPQ : △BAO = 1 : 2 → これより BP : BA = 1 : $\sqrt{2}$ (相似比, △BPQ∽△BAO)

ここでA,Bからx軸におろした垂線の足をA', B'とすると
A'B'の長さは 6 また BP : BA = B'O : B'A' = 1 : $\sqrt{2}$ より $OB'=6\times\frac{1}{\sqrt{2}}=3\sqrt{2}$ これより P の x 座標は
$4-3\sqrt{2}$, これが $y=x+4$ 上にあるので $y=4-3\sqrt{2}+4=8-3\sqrt{2}$ つまり P$(4-3\sqrt{2}, 8-3\sqrt{2})$ これを
$y=-x+k$ に代入して $k=12-6\sqrt{2}$