

関数 $f(x), g(x)$ は次の関係式

$$f(x) = e^x \left(1 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} g'(t) \sin t \, dt \right), \quad g(x) = \frac{1}{2}x^2 - \int_0^x f(t)e^{-t} \, dt$$

を満たす。ただし、 e は自然対数の底である。

(1) $a = \int_0^{\frac{\pi}{2}} g'(t) \sin t \, dt$ とおくと、 $a = 0$ となることを示せ。

(2) $h(x) = f(x)g(x)$ とする。 $h(x)$ の最小値を求めよ。

〔室蘭工大〕