関数 $f(x) = e^{-x} \sin x$ に対して，$f''(x)$ を $f(x)$ および $f'(x)$ を用いて表わせ。

〔秋田大〕

$$f'(x) = -e^{-x}\sin x + e^{-x}\cos x$$

$$f''(x) = e^{-x}\sin x - e^{-x}\cos x - e^{-x}\cos x - e^{-x}\sin x$$

$$= 2e^{-x}\sin x - 2e^{-x}\cos x - 2e^{-x}\sin x$$

$$= -2\{-e^{-x}\sin x + e^{-x}\cos x\} - 2e^{-x}\sin x$$

$$= -2f'(x) - 2f(x)$$

$$\therefore \underline{f''(x) = -2\{f'(x) + f(x)\}}$$

こっちの方が多分ずっとよい解法

与式を $f(x)e^x = \sin x$ と変形して微分すると

$$f(x)e^x + f'(x)e^x = \cos x$$

さらに微分して

$$f'(x)e^x + f(x)e^x + f''(x)e^x + f'(x)e^x = -\sin x$$

$$f''(x)e^x + 2f'(x)e^x + f(x)e^x = -f(x)e^x$$

$$f''(x)e^x = -2f'(x)e^x - 2f(x)e^x$$

$$\therefore \underline{f''(x) = -2\{f'(x) + f(x)\}}$$