10

a, b を正の定数, n を 2 以上の整数とする。このとき, 方程式 $\left(\frac{x}{a}\right)^n + \left(\frac{y}{b}\right)^n = 2$ の表わす曲線は, n に関係なくつねに点 (a, b) において一定の直線に接することを証明せよ。

〔芝浦工大〕

与式を変形すると

$$\frac{x^n}{a^n} + \frac{y^n}{b^n} = 2$$ となり x について微分すると

$$n\frac{x^{n-1}}{a^n} + n\frac{y^{n-1}}{b^n}\frac{dy}{dx} = 0$$ 両辺 n でわって

$$\frac{y^{n-1}}{b^n}\frac{dy}{dx} = -\frac{x^{n-1}}{a^n}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\left(\frac{b}{a}\right)^n\left(\frac{x}{y}\right)^{n-1}$$

曲線上の点 (x_1, y_1) における接線は

$$y = -\left(\frac{b}{a}\right)^n\left(\frac{x_1}{y_1}\right)^{n-1}(x - x_1) + y_1$$ となり

これが (a, b) を通るとき

$$y = -\left(\frac{b}{a}\right)^n\left(\frac{a}{b}\right)^{n-1}(x - a) + b$$

$$y = -\frac{b}{a}(x - a) + b$$ となり n に関係なく

この直線に接する.

この式を変形すると

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 2$$ が得られる.