サイクロイド12

a は正の定数とする。曲線

$$x = a(\theta - \sin\theta), y = a(1 - \cos\theta)(0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$$

上の点 P における法線が直線 $x = \pi a$ と交わる点を Q とする。ただし，P は点 $(\pi a, 2a)$ とは異なる点である。

(1) Q の y 座標を θ で表わせ。

(2) θ を π に近づけるとき Q はどのような点に近づくか。

〔中央大〕

(1) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \dfrac{\sin\theta}{1-\cos\theta}$ となる

点Pを $P(a(\theta-\sin\theta), a(1-\cos\theta))$ とすると

法線は
$$y = -\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\{x - a(\theta-\sin\theta)\} + a(1-\cos\theta)$$

これと $x=\pi a$ の交点 y は

$$y = -\left(\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\right)\pi a + \left(\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\right)a\theta \cancel{-a} + \cancel{a\cos\theta} + a - a\cos\theta$$

$$\therefore \quad y = \frac{(1-\cos\theta)a}{\sin\theta}(\theta-\pi)$$

(2)
$$\lim_{\theta\to\pi} \frac{(1-\cos\theta)a}{\sin\theta}(\theta-\pi)$$

$\theta-\pi=\alpha$ とおくと
$\theta=\pi+\alpha$ で

$$\left\{\lim_{\substack{\theta-\pi\to 0\\ \alpha}} \frac{1-\cos(\pi+\alpha)}{\sin(\pi+\alpha)}\alpha\right\}a = \lim_{\alpha\to 0}\left\{(1+\cos\alpha)\cdot -\frac{\alpha}{\sin\alpha}\right\}a$$

$$= -2a$$

$\therefore$ $(\pi a, -2a)$ に近づく