2つの関数 $f(x)=e^x, g(x)=\log x$ について，以下の問いに答えよ。

(1) 曲線 $y=f(x)$ の接線で原点を通るものを l_1，曲線 $y=g(x)$ の接線で原点を通るものを l_2 とするとき，l_1, l_2 の方程式を求めよ。

(2) 2直線 l_1, l_2 のなす角を $\theta \left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$ とするとき，$\sin\theta$ の値を求めよ。

接線で

(3) 曲線 $y=f(x)$ の傾きが k のものを m_1，曲線 $y=g(x)$ の接線で傾きが k のものを m_2 とするとき，m_1, m_2 の方程式を k を用いて表せ。

(4) 2直線 m_1, m_2 が一致するような実数 k の値は2つ存在することを示せ。

〔北里大〕

(1) $f'(x)=e^x$ 接点を (t, e^t) とすると接線の式は

$y=e^t(x-t)+e^t$ これが原点を通るから。$0=e^t\cdot(-t)+e^t$ より $t=1$

∴ 接線の式は $\underline{y=ex \cdots l_1}$

同様に $g'(x)=\frac{1}{x}$ で接点 $(t, \log t)$ とすると 接線の式は $y=\frac{1}{t}(x-t)+\log t$

$y=\frac{1}{t}x+\log t-1$ で これが原点を通るから $\log t=1$ $t=e$.

∴ 接線の式は $\underline{y=\frac{1}{e}x \cdots l_2}$

(2) l_1 の方向ベクトルは $(1, e)$，l_2 の方向ベクトルは $(e, 1)$ である。l_1, l_2 のなす角を θ とすると

内積の公式より $\cos\theta=\frac{e+e}{\sqrt{1+e^2}\cdot\sqrt{1+e^2}}=\frac{2e}{e^2+1}$ $\sin\theta>0$ より $\sin\theta=\sqrt{1-\left(\frac{2e}{e^2+1}\right)^2}$ より

$\sin\theta=\sqrt{\frac{e^4+2e^2+1-4e^2}{(e^2+1)^2}}$ で ∴ $\underline{\sin\theta=\frac{e^2-1}{e^2+1}}$

(3) (1)より $e^t=k$ $\log e^t=\log k$ より $t=\log k$. $e^{\log k}=a$ $\log k=\log a$ $k=a$

∴ $y=k(x-\log k)+k$ ∴ $\underline{m_1: y=kx-k\log k+k}$

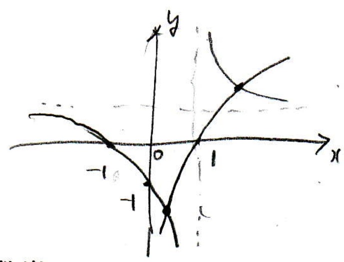
$\frac{1}{t}=k$ $t=\frac{1}{k}$ より $y=k\left(x-\frac{1}{k}\right)+\log\frac{1}{k}$ ∴ $\underline{m_2: y=kx-\log k-1}$

(4) $kx-k\log k+k=kx-\log k-1$

$k\log k-\log k=k+1$

$(k-1)\log k=k+1$

$\log k=\frac{k+1}{k-1}$ となり



$y_1=\log k$

$y_2=\frac{k+1}{k-1}$ $y_2=\frac{1+\frac{1}{k}}{1-\frac{1}{k}}$

とするとき

y_1 と y_2 のグラフの交点が2つあるので 2の実数 k が存在する。