3C微分14

$0 \leqq x \leqq 2\pi$ とする。このとき, 関数 $f(x)=\int_0^x e^t \cos t\,dt$ の最大値をとる $x$ とその最大値を求めよ。ただし, $e$ は自然対数の底とする。〔北海道大〕

$$f(x)=\int_0^x \overset{f(x)}{e^t}\,\overset{g(x)}{\cos t}\,dt$$

$$=\left[e^t \cos t\right]_0^x+\int_0^x e^t \sin t$$

$$=\left[e^t \cos t\right]_0^x+\left[e^t \sin t\right]_0^x-\underbrace{\int_0^x e^t \cos t\,dx}_{f(x)}$$ より

$$2f(x)= e^x\cos x-1+e^x\sin x$$

$$\therefore f(x)=\frac{e^x(\sin x+\cos x)-1}{2} \quad \cdots ①$$

また $f'(x)=e^x\cos x$ より $x=\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ で極値をとる

増減表をかくと

| $x$ | 0 | $\cdots$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\cdots$ | $\frac{3}{2}\pi$ | $\cdots$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ | |
| $f(x)$ | 0 | $\nearrow$ | | $\searrow$ | | $\nearrow$ | |

これより $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{e^{\frac{\pi}{2}}-1}{2}$　$f(2\pi)=\frac{e^{2\pi}-1}{2}$

$f\left(\frac{\pi}{2}\right)<f(2\pi)$ であるから

$f(x)$ は $x=2\pi$ のとき最大値 $\frac{e^{2\pi}-1}{2}$ をとる