7L 微分 15

曲線 $C: y = 2x - \log x$ について, 次の各問に答えよ。

(1) 曲線 C の概形をえがけ。ただし, $\lim_{x \to \infty} (2x - \log x) = \infty$ を証明なしで用いてもよい。

(2) 曲線 C 上の点 $(1, 2)$ における接線 l の方程式を求めよ。

(3) 曲線 C 上の点 P における接線 m が (2) で求めた l と直交するとき, 接線 m の方程式と接点 P の座標を求めよ。

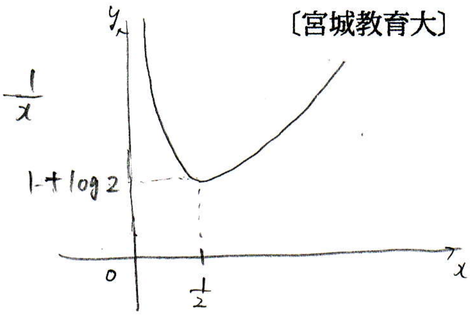
(4) (3) の場合に, 曲線 C と 2 つの接線 l と m とで囲まれた図形の面積 S を求めよ。

〔宮城教育大〕

(1) $x>0$

$y' = 2 - \frac{1}{x} = \frac{2x-1}{x}$ $\quad y'' = -\frac{-x}{x^2} = \frac{1}{x}$

x	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$
y	↘	$1+\log 2$	↗



(2) (1) の y' より l: $y = 1\cdot(x-1)+2$ $\quad \therefore \underline{y = x+1}$

(3) 点 P を $(p, 2p - \log p)$ とすると m は $y = \left(2 - \frac{1}{p}\right)(x-p) + 2p - \log p \cdots$ ① となり

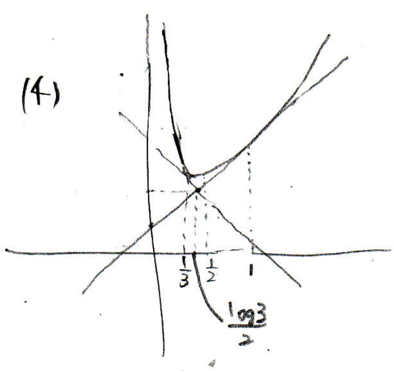
これが (2) の l と直交することから $\left(2 - \frac{1}{p}\right)\cdot 1 = -1$ となり $2 - \frac{1}{p} = -1$

$2p - 1 = -p$ $\quad p = \frac{1}{3}$ となる

$\therefore$ P の座標は $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3} + \log 3\right)$

m: $y = -x + 1 + \log 3$

(4)



m と l の交点

$x+1 = -x+1+\log 3$ より $2x = \log 3$ $\quad x = \frac{\log 3}{2}$

$\therefore$

$$S = \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{\log 3}{2}} \{2x - \log x - (-x+1+\log 3)\}\,dx + \int_{\frac{\log 3}{2}}^{1} \{2x - \log x - (x+1)\}\,dx$$

$$= \left[\frac{3}{2}x^2 - x\log 3 - x\log x\right]_{\frac{1}{3}}^{\frac{\log 3}{2}} + \left[\frac{1}{2}x^2 - x\log x\right]_{\frac{\log 3}{2}}^{1}$$

$$= \frac{3(\log 3)^2}{8} - \frac{(\log 3)^2}{2} - \cancel{A} - \left(\frac{1}{6} - \cancel{\frac{\log 3}{3}} + \cancel{\frac{\log 3}{3}}\right) + \frac{1}{2} - 0 - \left\{\frac{(\log 3)^2}{8} - \cancel{A}\right\}$$

$\because A$ は $\frac{\log 3 \cdot \log \frac{\log 3}{2}}{2}$

$$= \frac{1}{3} - \frac{(\log 3)^2}{4}$$