3Cビブン16

曲線 C が, θ を媒介変数として $x=\sin\theta$, $y=\dfrac{1}{\cos\theta}$ $\left(-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ と表されているとする。曲線 C 上で, x 座標が $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ である点をPとする。以下の問いに答えよ。

(1) 点Pにおける曲線 C の接線の方程式を求めよ。

(2) 点Pを通り, x 軸に垂直な直線を l とする。曲線 C, x 軸, y 軸および直線 l で囲まれる部分の面積を求めよ。

〔小樽商科大〕

(1) $\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$ より $\theta=\frac{1}{3}\pi$ より $y=\dfrac{1}{\frac{1}{2}}=2$

∴ $P\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 2\right)$ $\dfrac{dx}{d\theta}=\cos\theta$ $\dfrac{dy}{d\theta}=\dfrac{\sin\theta}{\cos^2\theta}$

∴ $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{d\theta}\Big/\dfrac{dx}{d\theta}=\dfrac{\sin\theta}{\cos^3\theta}=\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\left(\frac{1}{2}\right)^3}=4\sqrt{3}$

従って求める方程式は $y=4\sqrt{3}\left(x-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+2$ となり

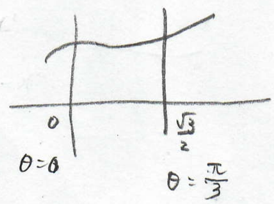
$y=4\sqrt{3}x-4$

(2) $0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{3}$ において $\dfrac{dx}{d\theta}=\cos\theta>0$

このとき $y>0$ であるから求める面積は

$0\leqq x<\frac{\sqrt{3}}{2}$ の区間すなわち $0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{3}$

の区間で



$\displaystyle\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} y\,dx$ …① ここで (1)より $dx=\cos\theta\,d\theta$ より

① は $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\cos\theta}\cdot\cos\theta\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{3}}d\theta$

$=\left[\theta\right]_0^{\frac{\pi}{3}}$

$=\dfrac{\pi}{3}$

$\dfrac{\pi}{3}$