3C 微分18

点 $\mathrm{P}(a, 0)$ $(a > 1)$ から原点 O を中心とする円 $x^2 + y^2 = 1$ へ接線を引き, 第 1 象限にある接点を Q とする。

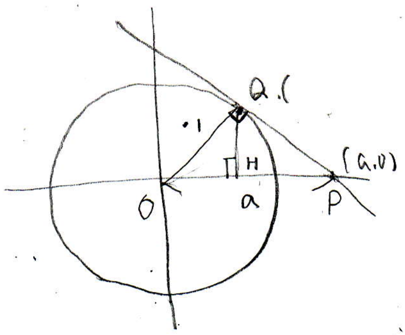
(1) 接点 Q の座標を求めよ。

(2) 点 Q から x 軸に下ろした垂線の足を H とするとき, $\triangle$OQH を x 軸の周りに回転してできる円錐の体積 $V(a)$ を求めよ。

(3) $V(a)$ が最大になるときの a の値と $V(a)$ の最大値を求めよ。

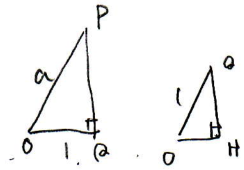
〔武蔵工大〕

(1)



Qからx軸におろした垂線の足をHとすると

$\triangle$POQ $\backsim$ $\triangle$QOH



$a:1 = 1:\mathrm{OH}$

$\mathrm{OH} = \dfrac{1}{a}$

$\therefore \mathrm{QH} = \sqrt{1-\dfrac{1}{a^2}}$ $\quad \therefore \mathrm{Q}\left(\dfrac{1}{a}, \sqrt{1-\dfrac{1}{a^2}}\right)$ //

(2)

$V(a) = \dfrac{\pi}{3}\left(\sqrt{1-\dfrac{1}{a^2}}\right)^2 \cdot \dfrac{1}{a}$

$V(a) = \dfrac{\pi}{3}\left(\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{a^3}\right)$ //

(3) $V(a) = \dfrac{\pi}{3}\left(\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{a^3}\right)$ であり $v(a) = \dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{a^3}$ の最大値を考えればよい。

$v'(a) = \dfrac{-1}{a^2} - \dfrac{-3a^2}{a^6} = \dfrac{-a^2+3}{a^4}$

$v'(a) = 0$とおくと $a = \pm\sqrt{3}$ $\quad a>0$ であるので 増減表をかくと

a	$\cdots$	$\sqrt{3}$	$\cdots$
$v'(a)$	+	0	−
$v(a)$	↗	最大	↘

よって $V(a)$ は $a=\sqrt{3}$のとき 最大値 $\dfrac{2\sqrt{3}}{27}\pi$ となる