放物線 $y = x^2$ と点 $(2,\ 4)$ を共有する円 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2 (r > 0)$ を考える。この 2 曲線の $(y')_{x=2}$ が等しく，$(y'')_{x=2}$ も等しくなるような a, b と r を求めよ。ただし，$(y')_{x=2}, (y'')_{x=2}$ は y の x に関する 1 次，2 次の導関数の $x = 2$ に対する値を表わす。

〔名古屋市大〕

$y' = 2x \quad y'' = 2$

また $2(x-a) + 2(y-b)y' = 0 \quad \cdots①$

$2(y-b)y' = -2(x-a)$

$y' = \dfrac{-x+a}{y-b} \quad \cdots②$

①をもう1回微分して

$2 + 2y'^2 + 2(y-b)y'' = 0$

$1 + y'^2 + (y-b)y'' = 0 \quad \cdots③$

$x=2$ のとき $y' = 4 \quad y'' = 2 \quad y = 4$ であるから ②, ③ に代入すると

$4 = \dfrac{2-a}{4-b}$ より $16 - 4b = -2 + a$

$a + 4b = 18 \quad \cdots④$

$1 + 16 + 2(4-b) = 0$

$17 + 8 - 2b = 0$

$-2b = -25$

$b = \dfrac{25}{2}$ これを④に代入して

$a + 50 = 18$

$a = -32$

点 $(2, 4)$ は円上の点であるから

$(2+32)^2 + \left(4 - \dfrac{25}{2}\right)^2 = r^2$

$(34)^2 + \left(\dfrac{17}{2}\right)^2 = r^2$

$(2 \cdot 17)^2 + \left(\dfrac{17}{2}\right)^2 = r^2$

$r = 17\sqrt{4 + \dfrac{1}{4}}$

$= 17\sqrt{\dfrac{17}{4}}$

$= \dfrac{17\sqrt{17}}{2}$

よって $r = \dfrac{17\sqrt{17}}{2}$, $a = -32$, $b = \dfrac{25}{2}$