3C積分26

$0 \leqq x \leqq 2\pi$ とする。関数 $f(x) = \int_0^x e^t \cos t\, dt$ の最大値をとる x とその最大値を求めよ。ただし, e は自然対数の底とする。〔北海道大〕

$f'(x) = e^x \cos x$　　$x = \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi$ で $f'(x)=0$ となる

$f(x) = \left[e^t \sin t\right]_0^x - \int_0^x e^t \sin t\, dt$

$= e^x \sin x - \left[e^t \cdot (-\cos t)\right]_0^x + \int_0^x e^t \cdot (-\cos t)\, dt$

$= e^x \sin x + e^x \cos x - 1 - \underbrace{\int_0^x e^t \cos t\, dt}_{f(x)}$

$\therefore$

$2\int_0^x e^t \cos t\, dt = e^x \sin x + e^x \cos x - 1$

$f(x) = \frac{1}{2}(e^x \sin x + e^x \cos x - 1)$

増減表をかくと

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\frac{3}{2}\pi$	$\cdots$	2π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗	A	↘		↗	B

$A = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{\pi}{2}} - 1\right)$

$B = f(2\pi) = \frac{1}{2}\left(e^{2\pi} - 1\right)$

$\therefore A < B$ であるから $f(x)$ は $0 \leqq x \leqq 2\pi$ のとき $x = 2\pi$ で

最大値 $\frac{1}{2}(e^{2\pi} - 1)$ をとる