3C 積分27

関数 $f(x), g(x)$ は次の関係式

$$f(x)=e^x\left(1+\int_0^{\frac{\pi}{2}} g'(t)\sin t\,dt\right),\ g(x)=\frac{1}{2}x^2-\int_0^x f(t)e^{-t}\,dt$$

を満たす。ただし, e は自然対数の底である。

(1) $a=\int_0^{\frac{\pi}{2}} g'(t)\sin t\,dt$ とおくとき, $a=0$ となることを示せ。

(2) $h(x)=f(x)g(x)$ とする。$h(x)$ の最小値を求めよ。

〔室蘭工大〕

(1) $a=\int_0^{\frac{\pi}{2}} g'(t)\sin t\,dt$ とおくと …①

$f(x)=e^x(1+a)$ ∴ $g(x)=\frac{1}{2}x^2-\int_0^x e^t(1+a)\cdot e^{-t}\,dt$ より

$g(x)=\frac{1}{2}x^2-\left[t(1+a)\right]_0^x$ $g(x)=\frac{1}{2}x^2-(1+a)x$ となる.

$g'(x)=x-(1+a)$ より ①は

$a=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\{t-(1+a)\}\sin t\,dt$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\sin t\,dt-(1+a)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\,dt$

$=\left[-t\cos t+\sin t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+\left[(1+a)\cos t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$=1-(1+a)$

$a=-a$ より $2a=0$ となるので $a=0$

(2) (1)より $f(x)=e^x$ $g(x)=\frac{1}{2}x^2-x$ であるから

$h(x)=\frac{1}{2}x^2e^x-xe^x$

$h'(x)=\cancel{xe^x}+\frac{1}{2}x^2e^x-e^x-\cancel{xe^x}$

$=\frac{1}{2}e^x(x^2-2)$

$h'(x)=0$ とおくと $x=\pm\sqrt{2}$ で極値をとる

増減表をかくと

x	…	$-\sqrt{2}$	…	$\sqrt{2}$	…
$h'(x)$	+	0	−	0	+
$h(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

よって最小値は
$x=\sqrt{2}$ のときでその値は
$e^{\sqrt{2}}(1-\sqrt{2})$